

2.1 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 1^{ΟΥ} ΒΑΘΜΟΥ

✦ Για την **1^{ου} βαθμού** εξίσωση $ax + \beta = 0$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

⇒ Αν $a \neq 0$, τότε η εξίσωση έχει **ακριβώς** μία λύση (που λέγεται και **ρίζα**):

$$ax + \beta = 0 \Leftrightarrow ax = -\beta \Leftrightarrow x = -\frac{\beta}{\alpha}$$

⇒ Αν $a = 0$ και $\beta \neq 0$, τότε η εξίσωση δεν έχει λύση, γι αυτό λέμε ότι είναι **αδύνατη**.

Π.χ $0x = 2$

⇒ Αν $a = \beta = 0$, τότε η εξίσωση γίνεται $0x = 0$ και αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$, δηλαδή είναι **ταυτότητα** ή αλλιώς λέμε ότι είναι **αόριστη**.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

✦ **Ισοδύναμες** λέγονται οι εξισώσεις που έχουν ακριβώς τις ίδιες ρίζες.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

2.1.1 Να λυθεί η εξίσωση: $\frac{x+3}{2} - \frac{x+1}{4} = 2x - \frac{15-x}{3}$

Λύση

ΜΕΘΟΔΟΣ

1. Πολλαπλασιάζουμε όλους τους όρους με το Ε.Κ.Π των παρονομαστών.
(απαλοιφή παρονομαστών)
2. Απαλείφουμε τις παρενθέσεις - επιμεριστική ιδιότητα
3. Χωρίζουμε γνωστούς από αγνώστους - στο 1^ο μέλος οι άγνωστοι
4. Κάνουμε πράξεις στο κάθε μέλος
5. Διαιρούμε με το συντελεστή του αγνώστου **και** το πρόσημό του.

$$\begin{aligned} \text{Έχουμε: } \frac{x+3}{2} - \frac{x+1}{4} &= 2x - \frac{15-x}{3} \quad \text{ΕΚΠ}=12 \Leftrightarrow \\ 12 \cdot \frac{x+3}{2} - 12 \cdot \frac{x+1}{4} &= 12 \cdot 2x - 12 \cdot \frac{15-x}{3} \Leftrightarrow \\ 6(x+3) - 3(x+1) &= 24x - 4(15-x) \Leftrightarrow \\ 6x+18-3x-3 &= 24x-60+4x \Leftrightarrow \\ 6x-3x-24x-4x &= -60-18+3 \Leftrightarrow \\ -25x &= -75 \Leftrightarrow \\ x &= \frac{-75}{-25} \Leftrightarrow \\ x &= 3 \end{aligned}$$

2.1.1 Να λυθούν οι εξισώσεις

α) $3(6x + 5) - 2x = 8(2x + 1)$

β) $2(3x - 1) - 3(x - 2) = 7 - 3(1 - x)$

Λύση:**α)** Έχουμε

$$\begin{aligned} 3(6x + 5) - 2x &= 8(2x + 1) \Leftrightarrow 18x + 15 - 2x = 16x + 8 \Leftrightarrow 18x - 2x - 16x = 8 - 14 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (18 - 2 - 16)x = -7 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 0x = -7 \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι δεν υπάρχει αριθμός x που το γινόμενο του με το μηδέν να ισούται με -7 επομένως η εξίσωση είναι **αδύνατη**.

β) Έχουμε

$$\begin{aligned} 2(3x - 1) - 3(x - 2) &= 7 - 3(1 - x) \Leftrightarrow 6x - 2 - 3x + 6 = 7 - 3 + 3x \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 6x - 3x - 3x = 7 - 3 + 2 - 6 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (6 - 3 - 3)x = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 0x = 0 \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι όποιον αριθμό βάλουμε στη θέση του x το πρώτο μέλος θα είναι πάντα ίσο με το μηδέν. Σε αυτήν την περίπτωση η εξίσωση λέγεται **ταυ-τότητα**.

✦ Στην συνέχεια θα δούμε, με τη βοήθεια παραδειγμάτων, πώς μπορούμε να επιλύσουμε εξισώσεις οι οποίες δεν είναι εξισώσεις 1^{ου} βαθμού, αλλά με κατάλληλη διαδικασία, ανάγονται σε εξισώσεις 1^{ου} βαθμού.

2.1.3 Να λυθεί η εξίσωση: $4x(3x-1)(-2x+6)(5x+15)(x-2)=0$

Λύση:

ΜΕΘΟΔΟΣ

1. Παραγοντοποιούμε την εξίσωση με μεγαλύτερο του 1^{ου} βαθμού, σε γινόμενο πρωτοβάθμιων παραγόντων και φτάνουμε στη μορφή: $f(x) \cdot \dots \cdot g(x) = 0$, όπου $f(x), g(x)$ πολυώνυμα.
2. Η παραπάνω εξίσωση είναι ισοδύναμη με $f(x) = 0$ ή ... ή $g(x) = 0$, αφού γνωρίζουμε ότι:
 $a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0$ ή $b = 0$

Έχουμε λοιπόν: $4x(3x-1)(-2x+6)(5x+15)(x-2)=0$.

Επομένως, $x=0$ ή $3x-1=0$ ή $-2x+6=0$ ή $5x+15=0$ ή $x-2=0$.

$$\Leftrightarrow x=0 \text{ ή } x=\frac{1}{3} \text{ ή } x=3 \text{ ή } x=-3 \text{ ή } x=2.$$

2.1.4 Να λυθεί η εξίσωση $(x^2-4)(3x+5)=(x+2)(3x+5)^2$

Λύση:

Έχουμε: $(x^2-4)(3x+5)=(x+2)(3x+5)^2$

$$\Leftrightarrow (x^2-4)(3x+5)-(x+2)(3x+5)^2=0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x+2)(3x+5)-(x+2)(3x+5)^2=0$$

$$\Leftrightarrow (x+2)(3x+5)[(x-2)-(3x+5)]=0$$

$$\Leftrightarrow (x+2)(3x+5)[x-2-3x-5]=0$$

$$\Leftrightarrow (x+2)(3x+5)(-2x-7)=0$$

$$\Leftrightarrow x = -2 \text{ ή } x = -\frac{5}{3} \text{ ή } x = -\frac{7}{2}$$

2.1.5 Να λυθεί η εξίσωση: $(x+1)^2 + (5-x)^2 = 0$

Λύση:

ΜΕΘΟΔΟΣ

Επειδή το άθροισμα τετραγώνων είναι μη αρνητικός αριθμός, θα έχουμε ότι:

$$f^2(x) + \dots + g^2(x) = 0 \Leftrightarrow f^2(x) = 0 \text{ και } \dots \text{ και } g^2(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow f(x) = 0 \text{ και } \dots \text{ και } g(x) = 0$$

$$\text{Έχουμε λοιπόν: } (x+1)^2 + (5-x)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1=0 \\ \text{και} \\ 5-x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ \text{και} \\ x=5 \end{cases}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΙΣΗΣ

2.1.1. Να αντιστοιχήσετε τα στοιχεία της στήλης Α με το σωστό συμπέρασμα της στήλης Β.

(Ερώτηση κατανόησης 1 Σχ. Βιβλίου)

ΣΤΗΛΗ Α	ΣΤΗΛΗ Β
α) $3x = 7$	1. Έχει μοναδική λύση
β) $0x = 0$	2. Είναι αδύνατη
γ) $0x = 5$	3. Είναι ταυτότητα
δ) $5x = 0$	

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ

2.1.2. Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις:

α) $6x - 2 = 9x - 5$

β) $3 - 2(x - 1) = x - 4$

γ) $x - 3(2 - x) = -6$

δ) $3(x + 4) - (x - 2) = 2 + x$

ε) $3(2x - 1) - 2(x - 3) = 5 - (x - 5)$

στ) $1 - 3(5x - 2) = x - 3(x - 2)$

2.1.3. Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις:

α) $5(x - 3) + 10(2 - 5x) + 10x = -(15 + 10x)$

β) $16(x + 1) - 2(3 - x) = -3(x + 6)$

γ) $3(x - 2) + 2(1 + x) = 3(2x - 1)$

δ) $-15 + 24(x + 2) = 2(5x + 9) - x$

ε) $5 + 6(x + 3) = 4(x - 1) + 7$

στ) $3(x + 1) = 5 - (-3x + 2)$

2.1.4. Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις:

$$\alpha) \frac{7x+4}{5} - x = \frac{3x-5}{2}$$

$$\beta) \frac{6(9+8x)}{2} - 27 = 24x$$

$$\gamma) \frac{5x-7}{2} - \frac{2x+7}{3} = 3x-14$$

$$\delta) \frac{2x-1}{3} - \frac{5x+2}{12} = \frac{x-3}{4} + 1$$

$$\epsilon) 2x - \frac{1}{2}(19-2x) = \frac{1}{2}(2x-11)$$

$$\sigma\tau) \frac{x+6}{2} + \frac{2(x+17)}{3} + \frac{5(x-10)}{6} = 2x+6$$

2.1.5. Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις:

$$\alpha) 3(2x+1) - 14 = 2(3x+5)$$

$$\beta) \frac{x+4}{2} - \frac{5-x}{3} = x - \frac{x-2}{6}$$

$$\gamma) \frac{x+1}{2} - \frac{2x-5}{3} = 1 - \frac{x-1}{6}$$

$$\delta) 5 - 6(x+3) = (x-2)(x+2) - (x+3)^2$$

$$\epsilon) \frac{3}{5}(2x-7) - \frac{2}{3}(x-8) = 4 + \frac{8x-3}{10}$$

$$\sigma\tau) \frac{1}{3}(1-2x) - \frac{1}{6}(4-5x) + 1 = 0$$

$$\zeta) \frac{3-4(2-x)}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1}{10} \left(\frac{7x}{2} + 8 \right)$$

2.1.6. Το τριπλάσιο ενός αριθμού ελαττούμενο κατά 5 είναι ίσο με το μισό του αριθμού αυξημένο κατά 10. Ποιος είναι ο αριθμός αυτός;

(Άσκηση 3 Σχ. Βιβλίου)

2.1.7. Ρώτησαν κάποιον πόσα ευρώ έχει στο πορτοφόλι του και εκείνος απάντησε:

«Αν είχα όσα έχω και τα μισά ακόμα και δέκα παραπάνω, θα είχα εκατό»

Μπορεί με τα χρήματα που έχει να αγοράσει ένα παντελόνι αξίας 65 ευρώ;

(Άσκηση 4 Σχ. Βιβλίου)

2.2 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 2^{ΟΥ} ΒΑΘΜΟΥ

★ Κάθε παράσταση της μορφής $ax^2 + \beta x + \gamma$, με $a, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ και $a \neq 0$ ονομάζεται **τριώνυμο**.

Αντίστοιχα η εξίσωση $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$, με $a \neq 0$ ονομάζεται **εξίσωση 2^{ου} βαθμού**.

π.χ. $2x^2 + 3x - \sqrt{7} = 0$, $2x^2 - 5x = 0$, $4x^2 - 36 = 0$

⇒ Οι αριθμοί a, β, γ λέγονται **συντελεστές** της εξίσωσης

⇒ Ο αριθμός γ λέγεται **σταθερός όρος**.

Μέθοδος επίλυσης εξισώσεων 2^{ου} βαθμού

⇒ Αν $\beta = 0$ τότε: $ax^2 + \gamma = 0 \Leftrightarrow ax^2 = -\gamma \Leftrightarrow x^2 = -\frac{\gamma}{a}$ και αυτή λύνεται κατά τα γνωστά.

π.χ. $4x^2 - 36 = 0 \Leftrightarrow 4x^2 = 36 \Leftrightarrow \frac{4x^2}{4} = \frac{36}{4} \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{9} \Leftrightarrow x = \pm 3$

δηλαδή: $x = -3$ ή $x = 3$

⇒ Αν $\gamma = 0$ τότε: $ax^2 + \beta x = 0 \Leftrightarrow x(\alpha x + \beta) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $\alpha x + \beta = 0$ και συνεχίζουμε κατά τα γνωστά.

π.χ. $2x^2 - 5x = 0 \Leftrightarrow x(2x - 5) = 0 \Leftrightarrow$

$x = 0$ ή $2x - 5 = 0$

$2x = 5$

$x = \frac{5}{2}$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

2.2.1 Να επιλυθεί η εξίσωση: $3x^2 - 12 = 0$

Λύση:

$$3x^2 - 12 = 0 \Leftrightarrow 3x^2 = 12 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$$

2.2.2 Να επιλυθεί η εξίσωση: $4x^2 + 20 = 0$

Λύση:

Έχουμε

$$4x^2 + 20 = 0 \Leftrightarrow 4x^2 = -20 \Leftrightarrow x^2 = -5$$

Η εξίσωση είναι αδύνατη καθώς δεν υπάρχει αριθμός x που όταν υψωθεί στο τετράγωνο να ισούται με αρνητικό αριθμό.

2.2.3 Να επιλυθεί η εξίσωση: $3x^2 - 12x = 0$

Λύση

$$3x^2 - 12x = 0 \Leftrightarrow 3x(x - 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$$

2.2.4 Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις

α) $3x^2 + 5x = 0$

β) $6x = 3x^2$

γ) $x^2 - 4 = 0$

δ) $4x^2 - 25 = 0$

ε) $x^2 + 5 = 0$

Λύση:**α)** Έχουμε

$$3x^2 + 5x = 0 \Leftrightarrow x(3x + 5) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 3x + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -\frac{5}{3} \end{cases}$$

β) Έχουμε

$$6x = 3x^2 \Leftrightarrow -3x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow 3x(x - 2) = 0$$

$$x = 0 \text{ ή } x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2.$$

γ) Έχουμε

$$x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x + 2) = 0$$

$$x = 2 \text{ ή } x = -2$$

δ) Έχουμε

$$4x^2 - 25 = 0 \Leftrightarrow (2x - 5)(2x + 5) = 0$$

$$2x - 5 = 0 \text{ ή } 2x + 5 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{5}{2} \text{ ή } x = -\frac{5}{2}$$

ε) Έχουμε

$$x^2 + 5 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -5$$

Αδύνατη.

2.2.5 Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις

α) $x^2 - 6x + 9 = 0$

β) $4x^2 = 4x - 1$

γ) $2x^3 - 5 = 2x - 5x^2$

δ) $(2x-1)^2 - 5(x-1)(x+1) = 5 - 4x$

ε) $x^2(2x-3) + 4x(2x-3) + 8x - 12$

Λύση:**α)** Διαδοχικά έχουμε

$$x^2 - 6x + 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2 \cdot 3 \cdot x + 3^2 = 0 \Leftrightarrow (x-3)^2 = 0 \Leftrightarrow x-3=0 \Leftrightarrow x=3.$$

β) Διαδοχικά έχουμε

$$\begin{aligned} 4x^2 = 4x - 1 &\Leftrightarrow 4x^2 - 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow (2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 1 + 1^2 \Leftrightarrow (2x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2x-1=0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

γ) Διαδοχικά έχουμε

$$\begin{aligned} 2x^3 - 5 &= 2x - 5x^2 \Leftrightarrow 2x^3 + 5x^2 - 5 - 2x = 0 \Leftrightarrow x^2(2x+5) - (2x+5) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (2x+5)(x^2-1) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (2x+5)(x-1)(x+1) = 0 \\ 2x+5=0 \text{ ή } x-1=0 \text{ ή } x+1=0 &\Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = -\frac{5}{2} \text{ ή } x=1 \text{ ή } x=-1 \end{aligned}$$

δ) Διαδοχικά έχουμε

$$\begin{aligned} (2x-1)^2 - 5(x-1)(x+1) &= 5 - 4x \Leftrightarrow 4x^2 - 4x + 1 - 5(x^2-1) + 4x - 5 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 4x^2 - 4 - 5x^2 + 5 = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow 1 - x^2 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (1-x)(1+x) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x=1 \text{ ή } x=-1 \end{aligned}$$

ε) Διαδοχικά έχουμε

$$\begin{aligned} x^2(2x-3) + 4x(2x-3) + 8x - 12 &= 0 \Leftrightarrow x^2(2x-3) + 4x(2x-3) + 4(2x-3) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (2x-3)(x^2 + 4x + 4) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (2x-3)(x+2)^2 = 0 \Leftrightarrow \\ 2x-3=0 \text{ ή } x+2=0 &\Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \text{ ή } x = -2. \end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΩΣΤΟΥ – ΛΑΘΟΥΣ

2.2.1. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ) αν είναι σωστές ή με (Λ) αν είναι λανθασμένες.

(Ερώτηση κατανόησης 1 Σχ. Βιβλίου)

1	Ο αριθμός 0 είναι λύση της εξίσωσης $x^2 - 4x + 3 = 0$.	☐ Σ ☐ Λ
2	Ο αριθμός 3 είναι λύση της εξίσωσης $x^2 - 4x + 3 = 0$.	☐ Σ ☐ Λ
3	Οι λύσεις της εξίσωσης $(x-2)(x+1)=0$ είναι $x=2$ και $x=-1$.	☐ Σ ☐ Λ
4	Η εξίσωση $x^2 = 16$ έχει μοναδική λύση τον αριθμό 4.	☐ Σ ☐ Λ
5	Η εξίσωση $x^2 = -9$ δεν έχει λύση.	☐ Σ ☐ Λ
6	Η εξίσωση $(x-2)^2 = 0$ έχει διπλή λύση τον αριθμό 2.	☐ Σ ☐ Λ

2.2.2. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ) αν είναι σωστές ή με (Λ) αν είναι λανθασμένες.

(Ερώτηση κατανόησης 2 Σχ. Βιβλίου)

1	Η εξίσωση $5x - 6 = x^2$.	☐ Σ ☐ Λ
2	Η εξίσωση $x^2 + 3x + 8 = x(x+2)$.	☐ Σ ☐ Λ
3	Η εξίσωση $(\lambda - 2)x^2 + 5x + 3 = 0$ είναι 1 ^ο βαθμού για $\lambda = 2$ και 2 ^ο βαθμού για $\lambda \neq 2$.	☐ Σ ☐ Λ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ

2.2.3. Να λυθούν οι εξισώσεις :

α) $(x-2) \cdot (x-3) = 0$

β) $3(x-1)x^2 = 0$

γ) $(1-2y)y = 0$

δ) $x(1-2x) = 0$

ε) $(15-3x)(4x+8) = 0$

στ) $x^2(12x-6) = 0$

ζ) $(x+1)^2(x+10) = 0$

η) $5x^3(x-2)(x+1) = 0$

θ) $x^2(x+8)(30-2x)^2 = 0$

2.2.4. Να λυθούν οι εξισώσεις :

α) $x^2 - 5x = 0$

β) $3x^2 = 6x$

γ) $12x^2 + 15x = 0$

δ) $x^2 = 7x$

ε) $3x^2 = -15x$

στ) $y^2 - 6y = 0$

ζ) $x^2 + x = 0$

η) $x = -x^2$

θ) $2x^2 - 10x = 0$

2.2.5. Να λυθούν οι εξισώσεις :

α) $x^2 - 5x = 0$

β) $-\omega^2 + 3\omega = 0$

γ) $-x^2 + 5x = 0$

δ) $-3x^2 - 12x = 0$

ε) $x^2 + 16 = 0$

στ) $-5x = 20x^2$

2.2.6. Να λυθούν οι εξισώσεις :

α) $x^2 - 25 = 0$

β) $3x^2 - 12 = 0$

γ) $x^2 - 8 = 0$

δ) $8x^2 = 18$

ε) $x^2 - 9 = 0$

στ) $x^2 - 49 = 0$

ζ) $x^2 = 25$

η) $x^2 = -100$

2.2.7. Να λυθούν οι εξισώσεις :

α) $64 - x^2 = 0$

β) $2x^2 - 32 = 0$

γ) $25x^2 - 16 = 0$

δ) $x^2 = 4$

ε) $x^2 + 1 = 0$

στ) $64 = -x^2$

ζ) $4x^2 - 8 = 0$

η) $9x^2 - 4 = 0$

2.2.8. Να λύσετε τις εξισώσεις :

α) $x^2 + 15 = 0$

β) $3x^2 + 12 = 0$

γ) $25x^2 - 1 = 0$

δ) $-49x^2 + 9 = 0$

ε) $81 = 16x^2$

στ) $4x^2 + 9 = 0$

2.2.9. Να λύσετε τις εξισώσεις :

α) $2x^2 - 8 = 0$

β) $5x^2 = 45$

γ) $-3x^2 + 48 = 0$

δ) $8x^2 - 18 = 0$

ε) $-x^2 = -x$

στ) $-50x^2 = -32$

ζ) $x^2 = 3$

η) $x^2 - 5 = 0$

θ) $9x^2 = 3$

ι) $-2x^2 = -\frac{1}{8}$

2.2.10. Να λυθούν οι εξισώσεις :

α) $(x^2 - x) \cdot (x^2 - 4) = 0$ **β)** $(x^2 - 1) \cdot (x^2 + 2) = 0$ **γ)** $x^3 = 4x$

δ) $(x^2 - 4x)(x^2 - 49) = 0$ **ε)** $(5x - x^2)(2x + 18)^2 = 0$

2.2.11. Να λυθούν οι εξισώσεις :

α) $3x^2 - 7x = 2x^2 - 5x$

β) $-x^2 + 12x = 9x - 2x^2$

γ) $x^2 - 12 = 6 - x^2$

δ) $2x^2 - 7 = 3x^2 + 2$

2.2.12. Να λυθούν οι εξισώσεις :

α) $x^2 - 6x + 9 = 0$

β) $x^2 = 2x - 1$

γ) $10x = x^2 + 25$

δ) $x^2 = 12x - 36$

ε) $9x^2 + 4 = 12x$

στ) $4x = 4x^2 + 1$

ζ) $x^2 - x + \frac{1}{4} = 0$

η) $2x^2 - 20x + 50 = 0$

2.2.13. Να λυθούν οι εξισώσεις :

α) $(x-4)^2 = 0$

β) $(x-3)^2 = 25$

γ) $(2x+1)^2 - 49 = 0$

δ) $5(x-2)^2 = 20$

ε) $3(x+5)^2 + 27 = 0$

στ) $(5x-1)^2 = 1$

ζ) $2(3x-2)^2 = 32$

η) $\frac{(x-2)^2}{3} = 12$

2.2.14. Να λυθούν οι εξισώσεις :

α) $x(2x-1) - (x-1)(x-2) + 2 = 0$

β) $(2x-1)^2 - 5(x-2)(x+2) = -4x-1$

γ) $(x-6)^2 + 4(2x-5) = 16$

δ) $(x+2)^2 = 2(19-2x) - (x-4)^2$

2.2.15. Να λυθούν οι εξισώσεις

α) $2x^2 + x = 0$

β) $2x^2 - 4 = 0$

γ) $2x(x-3) = x^2$

δ) $x^3 = x$

ε) $2x^3 - 50x = 0$

στ) $9x^3 = x$

2.2.16. Να λυθούν οι εξισώσεις

α) $2x^2 + 1 = 0$

β) $-2x^2 + 6x = 0$

γ) $2(x-3) = x^2 - 9$

δ) $x^3 - x^2 = x - 1$

ε) $6x^3 - 4x^2 = 2 - 3x$

στ) $x^3 - 2x^2 - 9x + 18 = 0$

2.2.17. Να λυθούν οι εξισώσεις

α) $x^2(x-2) - 6x(x-2) + 9(x-2) = 0$

β) $x^2(x^2 - 3x) = 16(x^2 - 3x)$

γ) $x^2(x^2 - 25) + 4x(25 - x^2) = 0$

δ) $x^2(x-2) = 9x - 18$

2.2.18. Να λυθούν οι εξισώσεις

α) $\frac{x^2 - 2x}{2} = \frac{x^2 - x}{4}$

β) $\frac{(x+1)^2}{3} = \frac{81}{12}$

γ) $(x^2 + x + 1)^2 - x^2 = 0$

δ) $(x^2 + 6x + 4)^2 - 16 = 0$

2.2.19. Να λυθούν οι εξισώσεις

α) $2[(x+2)^2 + (x-4)(x+4)] = -24 + x[3(x-3) - 2(x-1)]$

β) $8 - x[3 - (x-3)^2] = 2[(3-x)(x+2) - 2(x-1)^2]$

2.2.20. Να λυθούν οι εξισώσεις

α) $x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha \cdot \beta = 0$

β) $x^2 - (\sqrt{3} - 1)x - \sqrt{3} = 0$

(Άσκηση 7 Σχ. Βιβλίου)

2.3 ΕΠΙΛΥΣΗ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ 2^{ΟΥ} ΒΑΘΜΟΥ ΜΕ ΤΗΝ ΒΟΗΘΕΙΑ ΤΥΠΟΥ

Για την εξίσωση **2^{ου} βαθμού** $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$ υπολογίζουμε πρώτα την διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$$

Και έπειτα διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

★ Αν $\Delta > 0$, τότε η εξίσωση έχει δύο πραγματικές και άνισες λύσεις

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}.$$

★ 2. Αν $\Delta = 0$, τότε η εξίσωση έχει μία πραγματική και διπλή λύση $x_0 = \frac{-\beta}{2\alpha}$.

★ 3. Αν $\Delta < 0$, τότε η εξίσωση δεν έχει πραγματικές λύσεις.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

2.3.1 Να επιλυθεί η εξίσωση: $6x^2 - 5x + 1 = 0$

Λύση:

Οι συντελεστές της εξίσωσης είναι:

$$\alpha = 6 \quad \beta = -5 \quad \gamma = 1$$

Έτσι η διακρίνουσα είναι:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-5)^2 - 4 \cdot 6 \cdot 1 = 25 - 24 = 1 > 0$$

Συνεπώς:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 6} = \frac{5 \pm 1}{12} = \begin{cases} x_1 = \frac{5-1}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3} \\ x_2 = \frac{5+1}{12} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

2.3.2 Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις

α) $9x^2 - 12x + 4 = 0$

β) $3x^2 - 2x + 1 = 0$

Λύση:

α) Έχουμε $\alpha = 9, \beta = -12, \gamma = 4$.

$$\text{Άρα } \Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-12)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 4 = 144 - 144 = 0.$$

Επομένως η εξίσωση έχει μια διπλή ρίζα την

$$x_0 = -\frac{\beta}{2\alpha} = -\frac{-12}{2 \cdot 9} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$$

β) Έχουμε $\alpha = 3, \beta = -2, \gamma = 1$

$$\text{Άρα } \Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1 = 4 - 12 = -8 < 0$$

Επομένως η εξίσωση είναι αδύνατη.

2.3.3 Να επιλυθεί η εξίσωση $3x^2 - 24x + 30 = 0$

Λύση:

ΜΕΘΟΔΟΣ

Παρατηρούμε ότι οι συντελεστές του τριωνύμου διαιρούνται με το 3. Οπότε για να αποφύγουμε τις πολλές πράξεις διαιρούμε κάθε όρο του τριωνύμου με το 3.

Έχουμε

$$3x^2 - 24x + 30 = 0 \Leftrightarrow \frac{3x^2}{3} - \frac{24x}{3} + \frac{30}{3} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 10 = 0$$

Έχουμε $\alpha = 1, \beta = -8, \gamma = 10$ άρα

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10 = 64 - 40 = 24 > 0.$$

Επομένως η εξίσωση έχει δύο λύσεις τις

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-8) \pm \sqrt{24}}{2}.$$

Ισχύει ότι

$$\sqrt{24} = \sqrt{4 \cdot 6} = \sqrt{4} \sqrt{6} = 2\sqrt{6}$$

Έτσι οι λύσεις είναι

$$\begin{cases} x_1 = \frac{8+2\sqrt{6}}{2} \\ x_2 = \frac{8-2\sqrt{6}}{2} \end{cases} = \begin{cases} x_1 = \frac{2(4+\sqrt{6})}{2} \\ x_2 = \frac{2(4-\sqrt{6})}{2} \end{cases} = \begin{cases} x_1 = 4 + \sqrt{6} \\ x_2 = 4 - \sqrt{6} \end{cases}$$

2.3.4 Να λυθούν οι εξισώσεις

α) $x^2 + 5x = 0$

β) $x^2 - 4 = 0$

Λύση:

α) Έχουμε $\alpha = 1, \beta = 5, \gamma = 0$ άρα

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0 = 25 > 0$$

Άρα η εξίσωση έχει δύο λύσεις

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-5 \pm \sqrt{25}}{2} = \begin{cases} x_1 = \frac{-5+5}{2} \\ x_2 = \frac{-5-5}{2} \end{cases} = \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -5 \end{cases}.$$

β) Έχουμε $\alpha = 1, \beta = 0, \gamma = -4$ άρα

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 0^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 0 + 16 = 16 > 0$$

Άρα η εξίσωση έχει δύο λύσεις

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{0 \pm \sqrt{16}}{2} = \begin{cases} x_1 = \frac{4}{2} \\ x_2 = \frac{-4}{2} \end{cases} = \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -2 \end{cases}$$

ΜΕΘΟΔΟΣ

Τέτοιου είδους εξισώσεις λύνονται με δύο τρόπους

- ★ Με την βοήθεια της παραγοντοποίησης
- ★ Με την βοήθεια της διακρίνουσας

2.3.5 Να λυθούν οι εξισώσεις

α) $(2x-1)^2 - x(x-1) = 3 + x^2$

β) $\frac{x^2}{2} - \frac{x-1}{3} = x-1$

Λύση:**α)** Έχουμε

$$(2x-1)^2 - x(x-1) = 3 + x^2 \Leftrightarrow 4x^2 - 4x + 1 - x^2 + x - 3 - x^2 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 3x - 2 = 0$$

$$\alpha = 2, \beta = -3, \gamma = -2 \text{ άρα}$$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2) = 9 + 16 = 25 > 0$$

Επομένως η εξίσωση έχει δύο λύσεις

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 2} = \frac{3 \pm 5}{4} = \begin{cases} x_1 = \frac{3+5}{2} = \frac{8}{2} = 4 \\ x_2 = \frac{3-5}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \end{cases}$$

β) Έχουμε

$$\frac{x^2}{2} - \frac{x-1}{3} = x-1 \Leftrightarrow 6 \frac{x^2}{2} - 6 \frac{x-1}{3} = 6x-6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 2(x-1) = 6x-6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 2x + 2 - 6x + 6 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 8x + 8 = 0$$

$$\alpha = 3, \beta = -8, \gamma = 8 \text{ άρα}$$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-8)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 8 = 64 - 96 = -32 < 0$$

Επομένως η εξίσωση δεν έχει λύσεις.

ΜΕΘΟΔΟΣ

Αν η εξίσωση μας δεν παραγοντοποιείται εύκολα ή καθόλου τότε κάνουμε πράξεις και μαζεύουμε όλους τους όρους στο αριστερό κομμάτι επιδιώκοντας να φτάσουμε στην μορφή $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ και ακολουθούμε την διαδικασία της εύρεσης της διακρίνουσας.

2.3.6 Να επιλυθεί η εξίσωση: $x^2 + (\sqrt{3} - 1)x - \sqrt{3} = 0$

Λύση:

Οι συντελεστές της εξίσωσης είναι:

$$\alpha = 1 \quad \beta = \sqrt{3} - 1 \quad \gamma = -\sqrt{3}$$

Έτσι η διακρίνουσα είναι:

$$\begin{aligned} \Delta &= \beta^2 - 4\alpha\gamma = (\sqrt{3} - 1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-\sqrt{3}) = \\ &= (\sqrt{3})^2 - 2\sqrt{3} + 1 + 4\sqrt{3} = (\sqrt{3})^2 + 2\sqrt{3} + 1 = \\ &= (\sqrt{3} + 1)^2 > 0. \end{aligned}$$

Δεν κάνουμε χρήση της ιδιότητας $(\sqrt{\alpha})^2 = \alpha$

Συνεπώς:

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2 \cdot \alpha} = \frac{-(\sqrt{3} - 1) \pm \sqrt{(\sqrt{3} + 1)^2}}{2 \cdot 1} = \frac{-\sqrt{3} + 1 \pm (\sqrt{3} + 1)}{2} = \\ x_1 &= \frac{-\sqrt{3} + 1 + \sqrt{3} + 1}{2} = \frac{2}{2} = 1 \quad \text{ή} \quad x_2 = \frac{-\sqrt{3} + 1 - \sqrt{3} - 1}{2} = \frac{-2\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3}. \end{aligned}$$

2.3.7 Να εξετάσετε αν έχουν ή όχι πραγματικές ρίζες οι εξισώσεις:

α) $x^2 - 6x + 9 = 0$

β) $2x^2 - 5x + 3 = 0$

γ) $3x^2 + 4x + 2 = 0$

Λύση:

α) Βρίσκουμε την διακρίνουσα

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 36 - 36 = 0$$

Συνεπώς η εξίσωση έχει **μια διπλή ρίζα**.

β) Βρίσκουμε την διακρίνουσα

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 25 - 24 = 1 > 0$$

Συνεπώς η εξίσωση έχει **δυο ρίζες άνισες**.

γ) Βρίσκουμε την διακρίνουσα

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 16 - 24 = -8 < 0$$

Συνεπώς η εξίσωση είναι **αδύνατη**.

✦ Παραγοντοποίηση Τριωνύμου με την βοήθεια της Διακρίνουσας

Για την παραγοντοποίηση ενός τριωνύμου $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$ έχουμε τις εξής περιπτώσεις

⇒ Αν $\Delta > 0$ η εξίσωση έχει δύο ρίζες ρ_1, ρ_2 και παραγοντοποιείται ως εξής

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha(x - \rho_1)(x - \rho_2)$$

⇒ Αν $\Delta = 0$ η εξίσωση έχει μία διπλή ρίζα $\rho = \frac{-\beta}{2\alpha}$ και παραγοντοποιείται ως εξής

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha(x - \rho)^2$$

⇒ Αν $\Delta < 0$ τότε η εξίσωση δεν έχει λύσεις και δεν παραγοντοποιείται.

2.3.8 Να παραγοντοποιήσετε τα παρακάτω τριώνυμα

α) $x^2 - 3x - 4$

β) $9x^2 - 12x + 4$

γ) $x^2 - x + 1$

Λύση:

α) Η εξίσωση $x^2 - 3x - 4 = 0$ έχει διακρίνουσα

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 9 + 16 = 25 > 0$$

Επομένως η εξίσωση έχει δύο λύσεις

$$\rho_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2} = \begin{cases} \rho_1 = \frac{3+5}{2} = \frac{8}{2} = 4 \\ \rho_2 = \frac{3-5}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \end{cases}$$

Άρα το τριώνυμο παραγοντοποιείται ως εξής

$$x^2 - 3x - 4 = 1 \cdot (x - 4)(x - (-1)) = (x - 4)(x + 1)$$

β) Έχουμε

$$\alpha = 9, \beta = -12, \gamma = 4 \text{ άρα}$$

$$\Delta = (-12)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 4 = 144 - 144 = 0$$

Επομένως η εξίσωση έχει μία διπλή ρίζα

$$\rho = \frac{-\beta}{2\alpha} = \frac{-12}{2 \cdot 9} = \frac{-12}{18} = \frac{2}{3}$$

Άρα το τριώνυμο παραγοντοποιείται ως εξής

$$9x^2 - 12x + 4 = 9\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 = 9\left(\frac{3x-2}{3}\right)^2 = 9 \frac{(3x-2)^2}{9} = (3x-2)^2$$

γ) Έχουμε

$$\alpha = 1, \beta = -1, \gamma = 1 \text{ άρα}$$

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 1 - 4 = -3 < 0$$

Επομένως το τριώνυμο δεν παραγοντοποιείται.

2.3.9 Δίνεται η παράσταση $A = \frac{4x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}$

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση.

β) Να την απλοποιήσετε.

Λύση:

α) Η παράσταση δεν ορίζεται για εκείνες τις τιμές του x για τις οποίες

$$2x^2 - x - 1 = 0$$

Η εξίσωση έχει διακρίνουσα

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 1 + 8 = 9 > 0 \text{ άρα η εξίσωση έχει δύο λύσεις}$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 2} = \frac{1 \pm 3}{4} = \begin{cases} x_1 = \frac{1+3}{4} = \frac{4}{4} = 1 \\ x_2 = \frac{1-3}{4} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Άρα η παράσταση ορίζεται για όλα τα x εκτός $x \neq 1, x \neq -\frac{1}{2}$.

β) Έχουμε $4x^2 - 1 = (2x-1)(2x+1)$

Επειδή η εξίσωση $2x^2 - x - 1 = 0$ έχει δύο ρίζες $x_1 = 1, x_2 = -\frac{1}{2}$ παραγοντοποιείται

ως εξής

$$2x^2 - x - 1 = 2(x-1)\left(x + \frac{1}{2}\right) = (x-1)\left(2x + 2 \cdot \frac{1}{2}\right) = (x-1)(2x+1)$$

Άρα

$$A = \frac{(2x-1)(2x+1)}{(x-1)(2x+1)} = \frac{2x-1}{x-1} \text{ για } x \neq 1, x \neq -\frac{1}{2}$$

2.3.10 Να απλοποιηθεί η παράσταση:

$$A = \frac{x^2 - 7x + 12}{2x^2 - 5x - 3}$$

Λύση:

Το τριώνυμο $x^2 - 7x + 12$ έχει ρίζες $x_1 = 3$ και $x_2 = 4$, ενώ το τριώνυμο

$2x^2 - 5x - 3$ έχει ρίζες

$$x_1 = 3 \text{ και } x_2 = -\frac{1}{2}. \text{ Επομένως: } A = \frac{(x-3)(x-4)}{2(x-3)\left(x + \frac{1}{2}\right)} = \frac{x-4}{2x+1}.$$

ΠΡΟΣΟΧΗ !!

✦ Πρέπει να τονίσουμε ότι η παράσταση A ορίζεται αν $x \neq 3$ και $x \neq -\frac{1}{2}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΙΣΗΣ

2.3.1. Αν Δ η διακρίνουσα της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ να αντιστοιχίσετε τα στοιχεία της στήλης Α με το σωστό συμπέρασμα της στήλης Β.

(Ερώτηση κατανόησης 1 Σχ. Βιβλίου)

ΣΤΗΛΗ Α	ΣΤΗΛΗ Β
α) $\Delta > 0$	1. Η εξίσωση έχει μια τουλάχιστον λύση.
β) $\Delta = 0$	2. Η εξίσωση έχει δύο λύσεις.
γ) $\Delta \geq 0$	3. Η εξίσωση έχει μία διπλή λύση.
δ) $\Delta < 0$	4. Η εξίσωση δεν έχει λύσεις.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΩΣΤΟΥ – ΛΑΘΟΥΣ

2.3.2. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ) αν είναι σωστές ή με (Λ) αν είναι λανθασμένες.

(Ερώτηση κατανόησης 2 Σχ. Βιβλίου)

1	Αν μια εξίσωση 2 ^{ου} βαθμού έχει θετική διακρίνουσα, τότε έχει λύση.	☐ Σ ☐ Λ
2	Αν μια εξίσωση 2 ^{ου} βαθμού έχει διακρίνουσα θετική ή μηδέν τότε έχει μια τουλάχιστον λύση.	☐ Σ ☐ Λ
3	Η εξίσωση $2x^2 + 4x - 6 = 0$ γράφεται $2x^2 + 4x - 6 = (x - 1)(x + 3)$.	☐ Σ ☐ Λ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ**2.3.3.** Να λυθούν οι εξισώσεις

α) $x^2 + 5x + 4 = 0$

β) $x^2 - 10x + 25 = 0$

γ) $x^2 - 7x + 6 = 0$

δ) $-x^2 + x + 42 = 0$

ε) $-x^2 - 8x + 9 = 0$

στ) $-3x^2 + 2x + 1 = 0$

2.3.4. Να λυθούν οι εξισώσεις

α) $9x^2 - 6x + 1 = 0$

β) $4x = 4x^2 + 1$

γ) $3x^2 - 7x + 5 = 0$

δ) $4x^2 + 20x + 25 = 0$

ε) $-2x^2 + x - 1 = 0$

στ) $3x = x^2 + 4$

ζ) $x^2 - x + 2 = 0$

η) $-3x^2 = 1 - x$

2.3.5. Να λυθούν οι εξισώσεις

α) $x^2 + 6x = 0$

β) $3x^2 + 18x - 21 = 0$

γ) $5x^2 = 40x - 40$

δ) $x^2 - 49 = 0$

ε) $x^2 - 9x = 0$

στ) $3x^2 - 5x = 0$

ζ) $2x^2 + 8 = 0$

η) $-2x^2 + 32 = 0$

2.3.6. Να λυθούν οι εξισώσεις

α) $x^2 - 2x - 1 = 0$

β) $x^2 + 2x - 5 = 0$

γ) $3x^2 + 9x - 30 = 0$

δ) $7x^2 + 28x + 28 = 0$

ε) $11x^2 + 22x - 33 = 0$

2.3.7. Να λυθούν οι εξισώσεις

α) $2x^2 + x + 1 = 0$

β) $-2x^2 + 6x - 4 = 0$

γ) $2x(x - 3) = x^2 - 6$

δ) $x^2 - 2(x - 1) = 2x - 1$

ε) $(2x - 1)^2 - 3(x - 1) - 1 = 0$

στ) $7x^2 - (3x - 1)^2 = x + 2$

2.3.8. Να λυθούν οι εξισώσεις

α) $x^2 - (\sqrt{3} + 1)x + \sqrt{3} = 0$

β) $x^2 + (\sqrt{2} - 1)x - \sqrt{2} = 0$

γ) $x^2 + (\sqrt{3} - \sqrt{2})x - \sqrt{6} = 0$

δ) $\sqrt{3}x^2 - 6x + 3\sqrt{3} = 0$

2.3.9. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $x^2 - 3x + 2 = 0$

β) $x^2 + x - 2 = 0$

γ) $2x^2 - x - 3 = 0$

δ) $10x^2 + x - 2 = 0$

2.3.10. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $x^2 + 3x - 2 = 0$

β) $3x^2 + 5x + 1 = 0$

γ) $2x^2 + 6x + 3 = 0$

δ) $7x^2 - 4x + 1 = 0$

ε) $3x^2 + 2x - 4 = 3x - 7$

στ) $4x^2 - 6x + 5 = 4 - 5x^2$

2.3.11. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $7x^2 - 5x + 9 = 3(2x^2 + 1)$

β) $(2x + 1)^2 + 5(x + 2) = 6$

γ) $(x + 1)^2 - 3x(x + 2) = (x - 1)^2$

δ) $3x^2 - 3(x - 1)(2x - 1) = 2x + 1$

ε) $7x^2 - (3x - 1)^2 = x + 2$

2.3.12. Να λυθούν οι εξισώσεις :

α) $x - \frac{x^2 - 2}{2} = -3$

β) $x^2 - \frac{2x - 1}{6} = x - \frac{x^2}{3}$

γ) $\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{6} = 0$

δ) $\frac{x^2}{2} + \frac{8}{3}x - 2 = 0$

ε) $\frac{x^2}{6} + \frac{x}{3} + \frac{1}{2}$

στ) $x^2 + 0,6x - 0,4 = 0$

2.3.13. Να λυθούν οι εξισώσεις :

α) $x^3 - 2x^2 - 9x + 18 = 0$

β) $2x^3 - x^2 - 8x + 4 = 0$

γ) $x^3 - x^2 = x - 1$

δ) $x^5 + x^4 = x + 1$

ε) $(x-1)(x-2) = x(x-4) + (x+2)^2$

στ) $(2x-1)^2 - (x-3)^2 = (x+1)(2x-1) - 1$

2.3.14. Να λυθούν οι εξισώσεις :

α) $(x-1) \cdot (x^2 - 9) = (x+3) \cdot (x^2 - 1)$

β) $(5x-10) \cdot (x-1)^2 = (3x-6) \cdot (x^2 - 1)$

γ) $2(x-2)(x+3) + (-x-1)^2 = (x-1)^2$

δ) $\frac{x^2}{6} - \frac{2x}{3} = \frac{3x-10}{4}$

ε) $\frac{x-2}{2} = \frac{(x-1)(x+1)}{3} - \frac{2x+1}{6}$

2.3.15. Να λυθούν οι εξισώσεις :

α) $(x^2 - 4)(x^2 - 5x + 6) = 0$

β) $(x^2 + 5x)(3x^2 - 2x - 8) = 0$

γ) $(x^2 - 7x + 6)(4x^2 - 8x + 3) = 0$

2.3.16. Να λυθούν οι εξισώσεις :

α) $2[(3-x)(3+x) - 2x] = 3[2 - x(x-1)]$

β) $x[4 - (x-2)^2] = (2x-1)^2 - (x-1)^3$

γ) $x - 4[3(x-2) + 11] = -\frac{x}{3}(x+5)$

δ) $\frac{1}{2}(x+1) - \frac{1}{4}(x+1)(x-1) = -3$

2.3.17. Να λυθούν οι εξισώσεις :

α) $x^2(x-5) - 2x(5-x) - 8x + 40 = 0$

β) $x^2(x-2) - 3(x^2 - 4) = 2(2-x)$

γ) $x^2(x^2 - x - 6) - x^2 + x + 6 = 0$

2.3.18. Να παραγοντοποιήσετε τα τριώνυμα

α) $x^2 + x - 6$

β) $x^2 - 7x + 12$

γ) $2x^2 - x - 1$

δ) $5x^2 + x - 4$

ε) $x^2 - 6x + 9$

στ) $4x^2 - 4x + 1$

ζ) $-x^2 + x - 1$

η) $2x^2 - 3x + 2$

θ) $2x^2 - 12x + 18$

ι) $3x^2 - 7x + 5$

2.3.19. Να παραγοντοποιήσετε τα τριώνυμα

α) $2x^2 - x - 1$

β) $5x^2 + x - 4$

γ) $10x^2 - x - 2$

δ) $8x^2 - 10x + 3$

2.3.20. Να απλοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις

α) $\frac{2x^2 - 3x - 9}{4x^2 - 9}$

β) $\frac{2x^2 - 5x + 2}{2x^2 - x}$

γ) $\frac{3x^2 - 2x - 8}{3x^2 + 13x + 12}$

2.3.21. Απλοποιήστε τις παρακάτω κλασματικές παραστάσεις:

α) $\frac{x^2 + 3x - 18}{x^2 + 4x - 12}$

β) $\frac{x^2 - 25}{x^2 - 6x + 5}$

2.3.22. Να γίνουν γινόμενα παραγόντων τα παρακάτω τριώνυμα:

α) $f(x) = 3x^2 - 7x - 6$

β) $g(x) = 2x^2 + 2x + \frac{1}{2}$

γ) $h(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{5}{2}$

2.3.23. Να γίνουν γινόμενα παραγόντων τα παρακάτω τριώνυμα:

α) $f(x) = 5x^2 - 9x - 2$

β) $g(x) = \frac{9}{2}x^2 - 3x + \frac{1}{2}$

γ) $h(x) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + 1$

2.3.24. Δίνεται η παράσταση: $A = \frac{x^2 - 5x + 4}{3x^2 - 11x - 4}$.

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A .

β) Να απλοποιηθεί η παράσταση A .

2.3.25. Δίνεται η παράσταση: $K = \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 2x - 3}$.

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A .

β) Να απλοποιηθεί η παράσταση A .

2.4 ΕΠΙΛΥΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΜΕ ΤΗΝ ΧΡΗΣΗ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ 2^{ΟΥ} ΒΑΘΜΟΥ

✧ Με την βοήθεια των εξισώσεων 2^{ου} βαθμού μπορούμε να λύσουμε πολλά προβλήματα της καθημερινής μας ζωής, της οικονομίας, της φυσικής κ.τ.λ.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

2.4.1 Να βρείτε τις δύο πλευρές ενός ορθογωνίου με περίμετρο 68 cm και διάγωνο 26 cm.

Λύση:

Έστω x, y οι πλευρές του ορθογωνίου.

$$2x + 2y = 68 \quad \text{και} \quad x^2 + y^2 = 26^2$$

$$x + y = 34 \quad \text{και} \quad x^2 + y^2 = 676$$

$$y = 34 - x \quad \text{και} \quad x^2 + (34 - x)^2 = 676$$

$$x^2 + 34^2 - 2 \cdot 34 x + x^2 - 676 = 0$$

$$2x^2 - 68x + 1156 - 676 = 0$$

$$2x^2 - 68x + 480 = 0$$

$$x^2 - 34x + 240 = 0$$

$$\Delta = 34^2 - 4 \cdot 240 = 1156 - 960 = 196$$

$$x = \frac{34 \pm \sqrt{196}}{2} = \frac{34 \pm 14}{2} = \frac{34+14}{2} \quad \text{ή} \quad \frac{34-14}{2} = 24 \quad \text{ή} \quad 10$$

Από την εξίσωση $y = 34 - x$ θα έχουμε $y = 10$ ή 24 .

Άρα οι πλευρές του ορθογωνίου είναι 24 και 10

2.4.2 Να εξετάσετε αν υπάρχουν διαδοχικοί ακέραιοι που να είναι μήκη πλευρών ορθογωνίου τριγώνου.

Λύση:

Έστω $x-1, x, x+1$ διαδοχικοί ακέραιοι, μήκη πλευρών ορθογωνίου τριγώνου.

$$\text{Πυθαγόρειο: } (x+1)^2 = x^2 + (x-1)^2 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = x^2 + x^2 - 2x + 1$$

$$\Leftrightarrow -x^2 + 4x = 0$$

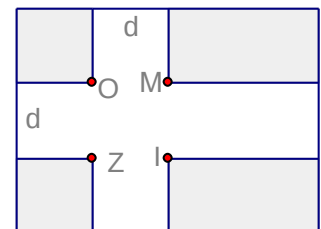
$$\Leftrightarrow -x(x-4) = 0$$

$$\Leftrightarrow x-4=0 \text{ αφού } x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x=4$$

Επομένως υπάρχουν διαδοχικοί ακέραιοι, μήκη πλευρών ορθογωνίου τριγώνου, και είναι οι $4-1, 4, 4+1$, δηλαδή οι αριθμοί: $3, 4, 5$

2.4.3 Η σημαία του διπλανού σχήματος έχει διαστάσεις 4m και 3m αντιστοίχως. Να βρείτε το πλάτος d του σταυρού, αν γνωρίζουμε ότι το εμβαδόν του είναι ίσο με το εμβαδόν του υπόλοιπου μέρους της σημαίας.



Λύση

Περιορισμός: $0 < d < 3$

$$\begin{aligned} \text{εμβαδόν του σταυρού} &= \text{εμβαδόν οριζόντιας λωρίδας} + \\ &\quad \text{εμβαδόν κατακόρυφης λωρίδας} - \\ &\quad \text{εμβαδόν του τετραγώνου ZIMO πλευράς } d \\ &= 4d + 3d - d^2 \\ &= 7d - d^2 \quad (1) \end{aligned}$$

Αλλά, εμβαδόν του σταυρού = εμβαδόν του υπόλοιπου μέρους της σημαίας.

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned}\text{εμβαδόν του σταυρού} &= \frac{1}{2} \text{ εμβαδού της όλης σημαίας} \\ &= \frac{1}{2} 4 \cdot 3 = 6 \quad (2)\end{aligned}$$

$$\text{Από τις (1), (2)} \Rightarrow 7d - 3d^2 = 6 \Leftrightarrow d^2 - 7d + 6 = 0$$

$$\Delta = 49 - 24 = 25, \quad d = \frac{7 \pm 5}{2} \Rightarrow \begin{cases} d_1 = 1, \text{δεκτή} \\ d_2 = 6, \text{απορρίπτεται} \end{cases} \quad \text{άρα } d = 1$$

2.4.4 Μια κατασκευαστική εταιρεία διαθέτει δύο μηχανήματα Α και Β. Το μηχάνημα Β χρειάζεται 12 ώρες περισσότερο από ότι χρειάζεται το μηχάνημα Α για να τελειώσει ένα συγκεκριμένο έργο. Ο χρόνος που απαιτείται για να τελειώσει το έργο, αν χρησιμοποιηθούν και τα δύο μηχανήματα μαζί είναι 8 ώρες. Να βρείτε το χρόνο που θα χρειαζόταν το κάθε μηχάνημα για να τελειώσει το έργο αυτό αν εργαζόταν μόνο του.

Λύση

Αν t είναι ο χρόνος που χρειάζεται το μηχάνημα Α για να τελειώσει ένα συγκεκριμένο έργο, ο αντίστοιχος χρόνος για το Β είναι $t + 12$.

Σε 1 ώρα, το Α θα εκτελέσει το $\frac{1}{t}$ του έργου και

το Β θα εκτελέσει το $\frac{1}{t+12}$ του έργου

Σε 8 ώρες, που τα δυο μαζί τελειώσουν το έργο,

το Α θα εκτελέσει το $8 \cdot \frac{1}{t}$ του έργου και

το Β θα εκτελέσει το $8 \cdot \frac{1}{t+12}$ του έργου

$$\text{Άρα θα έχουμε} \quad 8 \cdot \frac{1}{t} + 8 \cdot \frac{1}{t+12} = 1$$

$$8(t+12) + 8t = t(t+12)$$

$$8t + 96 + 8t = t^2 + 12t$$

$$t^2 - 4t - 96 = 0$$

$$\Delta = 16 + 4 \cdot 96 = 16 + 384 = 400$$

$$t = \frac{4 \pm \sqrt{400}}{2} = \frac{4 \pm 20}{2} = 12 \quad \text{ή} \quad -8 \quad \text{απορρίπτεται αφού } t \geq 0$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ

2.4.1. Τα μήκη των τριών πλευρών ενός ορθογωνίου τριγώνου είναι τρεις διαδοχικοί ακέραιοι αριθμοί. Να βρεθούν οι αριθμοί αυτοί.

2.4.2. Το εμβαδόν ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι 25 cm^2 . Πότε το ορθογώνιο έχει την ελάχιστη περίμετρο και ποια είναι αυτή;

2.4.3. Σε τραπέζιο το άθροισμα των βάσεων του και του ύψους του είναι 10.

α) Για ποια τιμή του ύψους του το εμβαδόν του τραπεζίου γίνεται μέγιστο;

β) Πόσο είναι το εμβαδόν αυτό;

2.4.4. Η πλευρά ενός τετραγώνου είναι 4 cm μεγαλύτερη από την πλευρά ενός άλλου τετραγώνου. Βρείτε τις πλευρές τους αν γνωρίζουμε ότι η διαφορά των εμβαδών τους είναι 88 cm^2 .

2.4.5. Το πλήθος των διαγωνίων ενός πολυγώνου με n πλευρές δίνεται από τον τύπο: $\delta_n = \frac{n(n-3)}{2}$. Αν το πολύγωνο έχει 104 διαγωνίους, πόσες είναι οι πλευρές του;

2.4.6. Το άθροισμα των n πρώτων φυσικών αριθμών δίνεται από τον τύπο:

$$\Sigma n = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Βρείτε το n , αν ξέρουμε ότι $\Sigma n = 300$.

2.4.7. Το εμβαδόν μιας σελίδας ενός βιβλίου είναι 300 cm^2 . Αν το μήκος της είναι 5 cm μεγαλύτερο από το πλάτος της, βρείτε τις διαστάσεις της σελίδας.

2.4.8. Το 4πλάσιο ενός αριθμού αυξημένο κατά 1 είναι ίσο με το τετράγωνό του αυξημένο κατά 5 .

Ποιοι είναι οι αριθμοί αυτοί ;

2.4.9. Σε ένα ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο η κάθετη πλευρά είναι κατά 3 μικρότερη από τη βάση . Να υπολογίσετε το εμβαδό του και το ύψος του .

2.4.10. Δύο αδέρφια είναι σήμερα 3 και 7 ετών. Σε πόσα χρόνια το γινόμενο των ηλικιών τους θα είναι 60 ;

2.5 ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

✦ **Κλασματική ή ρητή εξίσωση** ονομάζεται η εξίσωση που περιέχει ένα τουλάχιστον κλάσμα με άγνωστο στον παρονομαστή.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

2.5.1 Να λυθεί η εξίσωση $\frac{x-2}{x} + \frac{4}{x-2} = \frac{8}{x^2-2x}$.

Λύση:

ΜΕΘΟΔΟΣ

Για να λύσουμε μία ρητή εξίσωση ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα:

1. Παραγοντοποιούμε τους παρονομαστές
2. Βρίσκουμε το ΕΚΠ των παρονομαστών. Το ΕΚΠ θα είναι το ΕΚΠ των συντελεστών και όλες οι μεταβλητές και όλες οι παρενθέσεις που εμφανίζονται με τη μεγαλύτερη δύναμη που εμφανίζονται. (από μία φορά η κάθε μεταβλητή και η κάθε παρένθεση)
3. Βρίσκουμε για ποιες τιμές μηδενίζεται το ΕΚΠ των παρονομαστών, διότι αυτές οι τιμές θα μηδενίζουν τους παρονομαστές, άρα θα είναι οι περιορισμοί μας.
4. Πολλαπλασιάζουμε την εξίσωση κατά μέλη με το ΕΚΠ, οπότε γίνεται απαλοιφή παρονομαστών.
5. Λύνουμε την πολυωνυμική εξίσωση που προκύπτει.
6. Προσέχουμε στο τέλος να ελέγξουμε αν βρήκαμε κάποια τιμή που ήταν στους περιορισμούς του ΕΚΠ, ώστε να την απορρίψουμε!!

Παραγοντοποιώ τους παρονομαστές και έχω: $\frac{x-2}{x} + \frac{4}{x-2} = \frac{8}{x(x-2)}$.

Το ΕΚΠ των παρονομαστών είναι $x(x-2) \neq 0$, πρέπει επομένως $x \neq 0$ και $x \neq 2$.

Πολλαπλασιάζω με το ΕΚΠ και έχω:

$$x(x-2) \cdot \frac{x-2}{x} + x \cancel{(x-2)} \cdot \frac{4}{\cancel{x-2}} = \cancel{x(x-2)} \cdot \frac{8}{\cancel{x(x-2)}} \Leftrightarrow$$

$$(x-2)^2 + 4x = 8 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + 4x - 8 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{4} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 & \text{δεκτή} \\ \text{ή} \\ x = +2 & \text{απορρίπτεται} \end{cases}$$

Άρα τελικά $x = -2$.

2.5.2 Να λυθεί η εξίσωση : $\frac{x+3}{x-3} - \frac{1}{x} = \frac{3}{x^2-3x}$

Λύση :

$$\frac{x+3}{x-3} - \frac{1}{x} = \frac{3}{x^2-3x} \Leftrightarrow \frac{x+3}{x-3} - \frac{1}{x} = \frac{3}{x(x-3)} \Leftrightarrow$$

$$x(x-3) \frac{x+3}{x-3} - x(x-3) \frac{1}{x} = x(x-3) \frac{3}{x(x-3)} \Leftrightarrow$$

$$x(x+3) - (x-3) = 3 \Leftrightarrow x^2 + 3x - x + 3 = 3 \Leftrightarrow$$

$$x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x(x+2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = 0 & \text{απορρίπτεται (λόγω περιορισμών)} \\ \text{ή} \\ x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2 & \text{δεκτή} \end{cases}$$

Περιορισμοί :

ΕΚΠ:

$$x(x-3) \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$x \neq 0, 3$$

2.5.3 Να επιλυθεί η εξίσωση $\frac{1}{2x-3} + \frac{3}{3x-2x^2} = \frac{5}{x}$.

Λύση:

$$\frac{1}{2x-3} + \frac{3}{3x-2x^2} = \frac{5}{x} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2x-3} + \frac{3}{x(3-2x)} = \frac{5}{x} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2x-3} - \frac{3}{x(2x-3)} = \frac{5}{x} \Leftrightarrow \text{Πρέπει } x(2x-3) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0 \text{ και } x \neq \frac{3}{2}$$

$$x(2x-3) \frac{1}{2x-3} - x(2x-3) \frac{3}{x(2x-3)} = x(2x-3) \frac{5}{x} \Leftrightarrow$$

$$x-3 = 5(2x-3) \Leftrightarrow x-3 = 10x-15 \Leftrightarrow$$

$$x-10x = 3-15 \Leftrightarrow -9x = -12 \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{12}{9} \Leftrightarrow x = \frac{4}{3} \text{ δεκτή.}$$

2.5.4 Να επιλυθεί η εξίσωση $\frac{3}{4-2x} + \frac{30}{8(1-x)} = \frac{3}{2-x} + \frac{5}{2-2x}$.

Λύση

$$\frac{3}{4-2x} + \frac{30}{8(1-x)} = \frac{3}{2-x} + \frac{5}{2-2x} \Leftrightarrow$$

$$\frac{3}{2(2-x)} + \frac{30}{8(1-x)} = \frac{3}{2-x} + \frac{5}{2(1-x)} \Leftrightarrow \text{Πρέπει}$$

$$8(1-x)(2-x) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1, x \neq 2$$

$$\begin{aligned}
& 8(2-x)(1-x) \frac{3}{2(2-x)} + 8(2-x)(1-x) \frac{30}{8(1-x)} = \\
& 8(2-x)(1-x) \frac{3}{2-x} + 8(2-x)(1-x) \frac{5}{2(1-x)} \Leftrightarrow \\
& 12(1-x) + 30(2-x) = 24(1-x) + 20(2-x) \Leftrightarrow \\
& 12 - 12x + 60 - 30x = 24 - 24x + 40 - 20x \Leftrightarrow \\
& -12x - 30x + 24x + 20x = -12 - 60 + 24 + 40 \Leftrightarrow \\
& 2x = -8 \Leftrightarrow \\
& x = -4
\end{aligned}$$

2.5.5 Να λυθεί η εξίσωση: $\frac{x+1}{x^2+x} + \frac{x}{(x+1)^2} = \frac{2}{x}$

Λύση:

Η εξίσωση γράφεται: $\frac{x+1}{x^2+x} + \frac{x}{(x+1)^2} = \frac{2}{x} \Rightarrow \frac{x+1}{x(x+1)} + \frac{x}{(x+1)^2} = \frac{2}{x} \quad (1)$

Το Ε.Κ.Π. = $x(x+1)^2$ και για να έχει νόημα η (1), πρέπει οι παρονομαστές να **μην είναι** μηδέν, δηλαδή

$$x(x+1)^2 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ \text{και} \\ x \neq -1 \end{cases}, \text{ οπότε:}$$

$$x(x+1)^2 \cdot \frac{x+1}{x(x+1)} + x(x+1)^2 \cdot \frac{x}{(x+1)^2} = x(x+1)^2 \cdot \frac{2}{x} \Leftrightarrow$$

$$(x+1)^2 + x^2 = 2(x+1)^2 \Leftrightarrow (x+1)^2 - x^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x+1+x)(x+1-x) = 0 \Leftrightarrow (2x+1) \cdot 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$2x+1=0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \text{ που είναι } \textbf{δεκτή} \text{ σύμφωνα με τους περιορισμούς.}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΩΣΤΟΥ – ΛΑΘΟΥΣ

2.5.1. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ) αν είναι σωστές ή με (Λ) αν είναι λανθασμένες.

(Ερώτηση κατανόησης 1 Σχ. Βιβλίου)

1	Οι όροι της εξίσωσης $\frac{6}{x-1} + \frac{4}{x} = 8$ ορίζονται όταν $x \neq 0$ και $x \neq 1$.	☐ Σ ☐ Λ
2	Ο αριθμός 0 είναι λύση της εξίσωσης $\frac{1}{x+1} + \frac{x}{x} = 2$.	☐ Σ ☐ Λ
3	Αν απαλείψουμε τους παρονομαστές της εξίσωσης $\frac{5}{x} + \frac{3}{x^2} = 2$ τότε αυτή γράφεται $5x + 3 = 2$.	☐ Σ ☐ Λ
4	Οι όροι της εξίσωσης $\frac{x^3}{x^2+1} = x$ ορίζονται για όλους τους αριθμούς και το 0 αποτελεί λύση της.	☐ Σ ☐ Λ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ

2.5.2. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $\frac{3}{x-1} = -\frac{1}{2}$

β) $\frac{2x-1}{x-3} = \frac{5}{x-3}$

γ) $\frac{2}{5x+4} = \frac{1}{7}$

δ) $\frac{18}{7-x} - 6 = 0$

ε) $\frac{3x}{x-2} = 3 + \frac{6}{x-2}$

στ) $\frac{2}{x-3} + \frac{11}{9} = 1$

2.5.3. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $\frac{2}{x} + \frac{1}{x-2} = 1$

β) $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} = 2$

γ) $\frac{x+1}{x} + \frac{2x}{1-x} = -\frac{2}{x(x-1)}$

δ) $\frac{5x-8}{x-4} - \frac{5x+12}{x+6} = 0$

ε) $\frac{2}{3x-3} - \frac{x-2}{2x-3} = 0$

2.5.4. Να λυθούν οι εξισώσεις:

$$\alpha) 1 - \frac{3}{x} = \frac{10}{x^2}$$

$$\beta) \frac{1}{x+3} = \frac{2}{x-3} - \frac{1}{x-5}$$

$$\gamma) \frac{3}{2x+2} = \frac{5}{x+1} - \frac{7}{4}$$

$$\delta) \frac{2x+4}{3x+4} + \frac{3x-1}{3x-4} = \frac{15x^2+6}{9x^2-16}$$

$$\epsilon) \frac{1}{x^2+1} + \frac{x^2-2}{3x^2+3} = \frac{1}{3}$$

$$\sigma\tau) \frac{x-1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x^2+x}$$

$$\zeta) \frac{2x-3}{x-2} - \frac{x^2-2}{x^2-2x} + \frac{2}{x} = 0$$

$$\eta) \frac{2}{x} + \frac{x-8}{4x-x^2} = \frac{1}{x-4}$$

2.5.5. Να λυθούν οι εξισώσεις :

$$\alpha) \frac{2}{x^2-1} + \frac{1}{x+1} = 1$$

$$\beta) \frac{y+3}{y-3} - \frac{1}{y} = \frac{1}{y^2-3y}$$

$$\gamma) \frac{1}{x^2-4x+3} + \frac{2(x-3)}{x-1} = \frac{1}{x-3}$$

$$\delta) \frac{1}{x-2} - \frac{x+2}{x-1} = \frac{2x+5}{x^2-3x+2}$$

$$\epsilon) \frac{4x}{x^2-x} + \frac{x}{x+1} = \frac{4}{x^2-1}$$

2.5.6. Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις:

$$\alpha) \frac{5(x-2)}{x+2} - \frac{2(x-3)}{x+3} = 3$$

$$\beta) \frac{2x+1}{3x-3} = \frac{7x-1}{6x+6} - \frac{2x^2-3x-45}{4x^2-4}$$

$$\gamma) \frac{3+x}{x-4} + \frac{2-x}{2x-8} + \frac{2x-1}{3x-12} = \frac{5}{6}$$

$$\delta) \frac{7x+8}{21} - \frac{x+4}{8x-11} = \frac{x}{3}$$

$$\epsilon) \frac{2x-3}{2x-4} - 6 = \frac{x-5}{3(x-2)} - \frac{11}{2}$$

$$\sigma\tau) \frac{7x+16}{21} - \frac{x+8}{4x+10} = \frac{23}{70} + \frac{x}{3}$$

$$\zeta) \frac{x+1}{x-2} + \frac{x-1}{x+2} = \frac{2(x^2+2)}{x^2-4}$$

$$\eta) \frac{2x-13}{2x-16} + \frac{2(x-6)}{x-8} = \frac{7}{8} + \frac{10x-78}{3x-24}$$

$$\theta) \frac{x}{x-2} - \frac{x+1}{x-1} = \frac{x-8}{x-6} - \frac{x-9}{x-7}$$

$$\iota) \frac{x+5}{x+4} - \frac{x-6}{x-7} = \frac{x-4}{x-5} - \frac{x-15}{x-16}$$

$$\text{ια)} \quad \frac{4}{x+2} + \frac{7}{x+3} = \frac{37}{x^2+5x+6}$$

$$\text{ιβ)} \quad \frac{2+2x}{9x^2-4} - \frac{x-2}{9x^2+12x+4} = \frac{x+4}{9x^2-4}$$

$$\text{ιγ)} \quad \frac{3}{x-2} - \frac{4}{5x-15} = \frac{x-1}{x^2-5x+6}$$

$$\text{ιδ)} \quad \frac{1}{3x-1} + \frac{2(x+1)}{x-1} - \frac{3x^2+1}{3x^2-4x+1} = 1$$

$$\text{ιε)} \quad \frac{1}{x + \frac{1}{1 - \frac{x+1}{x-3}}} = 1$$

$$\text{ιστ)} \quad \frac{\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1}}{1 + \frac{x+1}{x-1}} = \frac{1}{2}$$

2.5.7. Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις:

$$\text{α)} \quad \frac{x+1}{x^2-2x+1} + \frac{1}{1-x} = \frac{1}{x}$$

$$\text{β)} \quad 1 + \frac{3}{x-2} = \frac{4}{x^2-4x+4}$$

$$\text{γ)} \quad \frac{1}{x-2} - \frac{x+2}{x-1} - \frac{2x+5}{x^2-3x+2}$$

$$\text{δ)} \quad \frac{1}{x^2+3x+2} - \frac{1}{x+1} = \frac{x+1}{2x+4}$$

2.5.8. Τα έξοδα ενός γεύματος ήταν 84 ευρώ. Μεταξύ των ατόμων που γευμάτισαν ήταν και 3 παιδιά, οπότε οι υπόλοιποι ενήλικες συμφώνησαν, προκειμένου να καλύψουν τα έξοδα των παιδιών να πληρώσει ο καθένας 9 ευρώ παραπάνω από αυτά που έπρεπε να πληρώσει. Πόσα ήταν τα άτομα που γευμάτισαν;

(Άσκηση 8 Σχ. Βιβλίου)

2.5.9. Ο διαχειριστής μια πολυκατοικίας αγόρασε πυροσβεστήρες για την πυρασφάλεια του κτηρίου και πλήρωσε 240 ευρώ. Πριν από λίγα χρόνια που η τιμή του κάθε πυροσβεστήρα ήταν 4 ευρώ μικρότερη, με τα ίδια χρήματα θα αγόραζε 2 πυροσβεστήρες περισσότερους. Να βρείτε πόσους πυροσβεστήρες αγόρασε.

(Άσκηση 9 Σχ. Βιβλίου)

2.6 ΑΝΙΣΟΤΗΤΕΣ

Διάταξη πραγματικών αριθμών

★ Σύγκριση πραγματικών αριθμών που παριστάνονται με σημεία ενός άξονα.

Άξονας πραγματικών αριθμών, ονομάζεται η ευθεία στην οποία ορίζουμε ένα σημείο στο οποίο αντιστοιχούμε τον αριθμό 0 και δεξιά αυτού άλλο ένα σημείο στο οποίο αντιστοιχούμε τον αριθμό 1. Τότε σε κάθε σημείο του άξονα αντιστοιχεί ένας πραγματικός αριθμός και το αντίστροφο σε κάθε πραγματικό αριθμό αντιστοιχεί ένα σημείο του άξονα.

Διάταξη πραγματικών αριθμών ονομάζουμε την τοποθέτηση τους στον άξονα των πραγματικών αριθμών.

Ανισότητα ονομάζουμε μια σχέση διάταξης μεταξύ πραγματικών αριθμών.

Αν στον άξονα έχουμε δύο αριθμούς τότε μεγαλύτερος είναι εκείνος που βρίσκεται δεξιότερα.

Ένας αριθμός α λέμε ότι είναι **μεγαλύτερος** από έναν άλλο αριθμό β όταν ο α βρίσκεται στον άξονα δεξιότερα του β και συμβολίζουμε $\alpha > \beta$.

Ένας αριθμός α λέμε ότι είναι **μικρότερος** από έναν άλλο αριθμό β όταν ο α βρίσκεται στον άξονα αριστερότερα του β και συμβολίζουμε $\alpha < \beta$.

★ Σύγκριση πραγματικών αριθμών που δεν παριστάνονται με σημεία ενός άξονα.

Θα λέμε ότι ο αριθμός α είναι **μεγαλύτερος** από τον β , και θα συμβολίζουμε με $\alpha > \beta$, όταν η διαφορά $\alpha - \beta$ είναι θετικός αριθμός. Δηλαδή:

$$\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta > 0$$

Θα λέμε ότι ο αριθμός α είναι **μικρότερος** από τον β , και θα συμβολίζουμε με $\alpha < \beta$, όταν η διαφορά $\alpha - \beta$ είναι αρνητικός αριθμός. Δηλαδή:

$$\alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta < 0$$

Θα λέμε ότι οι αριθμοί α και β είναι ίσοι όταν η διαφορά τους είναι 0. Δηλαδή:

$$\alpha - \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta$$

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

- ★ Κάθε θετικός αριθμός είναι μεγαλύτερος από το μηδέν.
- ★ Κάθε αρνητικός αριθμός είναι μικρότερος από το μηδέν.
- ★ Κάθε θετικός αριθμός είναι μεγαλύτερος από κάθε αρνητικό αριθμό.

Δύο αριθμοί λέγονται **ομόσημοι**, αν και οι δύο είναι θετικοί ή αν και οι δύο είναι αρνητικοί.

Δύο αριθμοί λέγονται **ετερόσημοι**, αν ο ένας είναι θετικός και ο άλλος είναι αρνητικός αριθμός.


Αξιώματα στο σύνολο των πραγματικών αριθμών

Αξιώματα		Συμβολισμός
(1)	Το άθροισμα δύο θετικών αριθμών είναι θετικός αριθμός	Αν $\alpha > 0$, $\beta > 0$ τότε $\alpha + \beta > 0$
(2)	Το άθροισμα δύο αρνητικών αριθμών είναι αρνητικός αριθμός	Αν $\alpha < 0$, $\beta < 0$ τότε $\alpha + \beta < 0$
(3)	Το γινόμενο δύο ομόσημων αριθμών είναι θετικός αριθμός	Αν $(\alpha > 0 \text{ και } \beta > 0)$ ή $(\alpha < 0 \text{ και } \beta < 0)$ τότε $\alpha \cdot \beta > 0$
(4)	Το πηλίκο δύο ομόσημων αριθμών είναι θετικός αριθμός	Αν $(\alpha > 0 \text{ και } \beta > 0)$ ή $(\alpha < 0 \text{ και } \beta < 0)$ τότε $\frac{\alpha}{\beta} > 0$
(5)	Το γινόμενο δύο ετερόσημων αριθμών είναι αρνητικός αριθμός	Αν $(\alpha > 0 \text{ και } \beta < 0)$ ή $(\alpha < 0 \text{ και } \beta > 0)$ τότε $\alpha \cdot \beta < 0$
(6)	Το πηλίκο δύο ετερόσημων αριθμών είναι αρνητικός αριθμός	Αν $(\alpha > 0 \text{ και } \beta < 0)$ ή $(\alpha < 0 \text{ και } \beta > 0)$ τότε $\frac{\alpha}{\beta} < 0$

Ιδιότητες της διάταξης

Ιδιότητα		Συμβολισμός
(1)	Αν και στα δύο μέλη μιας ανισότητας προσθέσουμε τον ίδιο αριθμό, τότε προκύπτει ανισότητα με την ίδια φορά.	Αν $\alpha > \beta$ τότε $\alpha + \gamma > \beta + \gamma$
(2)	Αν και στα δύο μέλη μιας ανισότητας αφαιρέσουμε τον ίδιο αριθμό, τότε προκύπτει ανισότητα με την ίδια φορά.	Αν $\alpha > \beta$ τότε $\alpha - \gamma > \beta - \gamma$
(3)	Αν πολλαπλασιάσουμε και τα δύο μέλη μιας ανισότητας με τον ίδιο θετικό αριθμό, τότε προκύπτει ανισότητα με την ίδια φορά.	Αν $\alpha > \beta$ και $\gamma > 0$ τότε $\alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \gamma$
(4)	Αν διαιρέσουμε και τα δύο μέλη μιας ανισότητας με τον ίδιο θετικό αριθμό, τότε προκύπτει ανισότητα με την ίδια φορά.	Αν $\alpha > \beta$ και $\gamma > 0$ τότε $\frac{\alpha}{\gamma} > \frac{\beta}{\gamma}$
(5)	Αν πολλαπλασιάσουμε και τα δύο μέλη μιας ανισότητας με τον ίδιο αρνητικό αριθμό, τότε προκύπτει ανισότητα με αντίθετη φορά.	Αν $\alpha > \beta$ και $\gamma < 0$ τότε $\alpha \cdot \gamma < \beta \cdot \gamma$
(6)	Αν διαιρέσουμε και τα δύο μέλη μιας ανισότητας με τον ίδιο αρνητικό αριθμό, τότε προκύπτει ανισότητα με αντίθετη φορά.	Αν $\alpha > \beta$ και $\gamma < 0$ τότε $\frac{\alpha}{\gamma} < \frac{\beta}{\gamma}$
(7)	Αν προσθέσουμε κατά μέλη δύο ή περισσότερες ανισότητες που έχουν την ίδια φορά προκύπτει ανισότητα με την ίδια φορά.	Αν $\alpha > \beta$ και $\gamma > \delta$ τότε $\alpha + \gamma > \beta + \delta$
(8)	Αν πολλαπλασιάσουμε κατά μέλη δύο ή περισσότερες ανισότητες που έχουν την ίδια φορά και θετικά μέλη προκύπτει ανισότητα με την ίδια φορά.	Αν $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ θετικοί αριθμοί με $\alpha > \beta$ και $\gamma > \delta$ τότε $\alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \delta$

Πρόταση		Συμβολισμός
(1)	Το τετράγωνο κάθε αριθμού είναι μη αρνητικός αριθμός	$\alpha^2 \geq 0$
(2)	Αν το άθροισμα τετραγώνων δύο αριθμών είναι μηδέν τότε οι αριθμοί είναι ίσοι με μηδέν	Αν $\alpha^2 + \beta^2 = 0$, τότε $\alpha = 0$ και $\beta = 0$
(3)	Ο αντίστροφος ενός θετικού αριθμού είναι θετικός αριθμός	Αν $\alpha > 0$, τότε $\frac{1}{\alpha} > 0$
(4)	Ο αντίστροφος ενός αρνητικού αριθμού είναι αρνητικός αριθμός	Αν $\alpha < 0$, τότε $\frac{1}{\alpha} < 0$
(5)	Οι αντίστροφοι δύο ομόσημων αριθμών δημιουργούν ανισότητα αντίθετης φοράς	Αν α, β ομόσημοι και $\alpha > \beta$, τότε $\frac{1}{\alpha} < \frac{1}{\beta}$
(6)	Οι αντίστροφοι δύο ετερόσημων αριθμών δημιουργούν ανισότητα ίδιας φοράς	Αν α, β ετερόσημοι και $\alpha > \beta$, τότε $\frac{1}{\alpha} > \frac{1}{\beta}$
(7)	Αν α, β θετικοί με $\alpha > \beta$ και ν φυσικός αριθμός διάφορος του μηδενός, τότε $\alpha^\nu > \beta^\nu$, και αντίστροφα	
(8)	ΔΕΝ επιτρέπεται να αφαιρούμε ανισότητες κατά μέλη	
(9)	ΔΕΝ επιτρέπεται να διαιρούμε ανισότητες κατά μέλη	

Μεθοδολογία για τις ασκήσεις

- ⇒ Πάμε όλους τους όρους στο 1^ο μέλος της ανισότητας
- ⇒ Παραγοντοποιούμε το 1^ο μέλος της ανισότητας
- ⇒ Καταλήγουμε σε προφανή ανισοτική σχέση

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

2.6.1 Αν $\alpha > -3$, να αποδείξετε ότι $6 + 2\alpha > 3 + \alpha$

Λύση:

$$6 + 2\alpha > 3 + \alpha$$

$$6 + 2\alpha - 3 - \alpha > 0$$

$$\alpha + 3 > 0$$

Που ισχύει από δεδομένα.

ΜΕΘΟΔΟΣ

Ξεκινάμε από την ζητούμενη ανίσωση και με ισοδυναμίες προσπαθούμε να καταλήξουμε σε κάτι που ισχύει.

2.6.2 Αν $\alpha > 1 > \beta$, να αποδείξετε ότι $\alpha + \beta > 1 + \alpha\beta$

Λύση:

Έχουμε

$$\alpha + \beta > 1 + \alpha\beta$$

$$\alpha + \beta - 1 - \alpha\beta > 0$$

$$(\alpha - 1) + \beta(1 - \alpha) > 0$$

$$(\alpha - 1) - \beta(\alpha - 1) > 0$$

$$(\alpha - 1)(1 - \beta) > 0$$

Που ισχύει από δεδομένα αφού $\alpha > 1 \Leftrightarrow \alpha - 1 > 0$ και $1 < \beta \Leftrightarrow 1 - \beta > 0$.

2.6.3 Να αποδείξετε ότι $\alpha^2 + 9 \geq 6\alpha$

Λύση:

Έχουμε

$$\alpha^2 + 9 \geq 6\alpha$$

$$\alpha^2 + 9 - 6\alpha \geq 0$$

$$\alpha^2 - 2 \cdot \alpha \cdot 3 + 3^2 \geq 0$$

$$(\alpha - 3)^2 \geq 0$$

Ισχύει αφού κάθε αριθμός υψωμένος στο τετράγωνο είναι πάντα θετικός.

2.6.4 Να αποδείξετε ότι $(\alpha + \beta)^2 + 4\alpha\beta \geq -8\beta^2$

Λύση:

Έχουμε

$$(\alpha + \beta)^2 + 4\alpha\beta \geq -8\beta^2$$

$$(\alpha + \beta)^2 + 4\alpha\beta + 8\beta^2 \geq 0$$

$$\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 + 4\alpha\beta + 8\beta^2 \geq 0$$

$$\alpha^2 + 6\alpha\beta + 9\beta^2 \geq 0$$

$$\alpha^2 + 2 \cdot \alpha \cdot 3\beta + (3\beta)^2 \geq 0$$

$$(\alpha + 3\beta)^2 \geq 0 \text{ (ισχύει)}$$

2.6.5 Αν $2 < x < 5$ και $3 < y < 4$ να αποδείξετε ότι

α) $5 < x + y < 9$

β) $6 < xy < 20$

γ) $13 < 2x + 3y < 22$

δ) $-2 < x - y < 2$

ε) $\frac{17}{4} < x^2 + \frac{1}{y} < \frac{76}{3}$

Λύση:

α) Έχουμε

$$\Rightarrow 2 < x < 5$$

$$\Rightarrow 3 < y < 4$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις παραπάνω ανισότητες και έχουμε

$$5 < x + y < 9.$$

β) Έχουμε

$$\Rightarrow 2 < x < 5$$

$$\Rightarrow 3 < y < 4$$

Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη τις παραπάνω ανισότητες και έχουμε

$$6 < xy < 20.$$

γ) Έχουμε

$$\Rightarrow 2 < x < 5 \Leftrightarrow 4 < 2x < 10$$

$$\Rightarrow 3 < y < 4 \Leftrightarrow 9 < 3y < 12$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις παραπάνω ανισότητες και έχουμε

$$13 < 2x + 3y < 22$$

δ) Έχουμε

$$\Rightarrow 2 < x < 5$$

$$\Rightarrow 3 < y < 4 \Leftrightarrow -3 > -y > -4 \Leftrightarrow -4 < -y < -3$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις παραπάνω ανισότητες και έχουμε

$$-2 < x - y < 2$$

ε) Έχουμε

ΜΕΘΟΔΟΣ

Αν $\alpha < \beta$, τότε

★ Αν V άρτιος και $\beta > \alpha > 0$ τότε $\alpha^V < \beta^V$

★ Αν V άρτιος και $0 > \beta > \alpha$ τότε $\beta^V < \alpha^V$

★ Αν V περιττός τότε $\alpha^V < \beta^V$.

$$\Rightarrow 2 < x < 5 \Leftrightarrow 4 < x^2 < 25$$

$$\Rightarrow 3 < y < 4 \Leftrightarrow \frac{1}{3} > \frac{1}{y} > \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{4} < \frac{1}{y} < \frac{1}{3}$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις παραπάνω ανισότητες και έχουμε

$$4 + \frac{1}{4} < x^2 + \frac{1}{y} < 25 + \frac{1}{3} \Leftrightarrow$$

$$\frac{17}{4} < x^2 + \frac{1}{y} < \frac{76}{3}.$$

2.6.6. Αν $x^2 + y^2 = 2x - 4y - 5$ να βρείτε τα x, y .

Λύση:

Έχουμε

$$x^2 + y^2 = 2x - 4y - 5 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2x + 4y + 5 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2 \cdot x \cdot 1 + 1^2 + y^2 + 2 \cdot 2 \cdot y + 2^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+1)^2 = 0$$

Τότε

$$x-1=0 \text{ και } y+1=0 \text{ δηλαδή}$$

$$x=1 \text{ και } y=-1$$

ΜΕΘΟΔΟΣ

Θα μαζέψουμε όλους τους όρους στο πρώτο μέλος και κάνοντας συμπλήρωση τετραγώνων θα αξιοποιήσουμε την ιδιότητα: Αν $x^2 + y^2 = 0$ τότε $x=0$ και $y=0$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΩΣΤΟΥ – ΛΑΘΟΥΣ

2.6.1. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ) αν είναι σωστές ή με (Λ) αν είναι λανθασμένες.

(Ερώτηση κατανόησης 1 Σχ. Βιβλίου)

1	Αν $\alpha < 6$ τότε $\alpha - 6 < 0$.	☐ Σ ☐ Λ
2	Αν $\alpha > \beta$ τότε $-\alpha < -\beta$.	☐ Σ ☐ Λ
3	Αν $\alpha < 0$ τότε $-\alpha > 0$.	☐ Σ ☐ Λ
4	Αν $x > 0$ τότε $x + 5 > 0$.	☐ Σ ☐ Λ
5	Αν $\alpha > 6$ και $\beta > -4$ τότε $\alpha + \beta > 2$.	☐ Σ ☐ Λ
6	Αν $x > 2$ και $y > 3$ τότε $xy > 6$.	☐ Σ ☐ Λ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ

2.6.2. Να αποδείξετε ότι $\alpha^2 + 9 \geq 6\alpha$.

2.6.3. Να αποδείξετε ότι $2(\alpha^2 + \beta^2) \geq (\alpha + \beta)^2$

2.6.4. Να αποδείξετε ότι $\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha + 1 \geq 0$. Πότε ισχύει η ισότητα;

2.6.5. Αν $x < 5$ και $y < 3$ να δείξετε ότι

α) $(x-5)(y-3) > 0$

β) $xy - 3x - 5y + 15 > 0$

2.6.6. Αν $x < 2 < y$ να δείξετε ότι $2(x+y) > 4 + xy$

2.6.7. Αν $x > 3$ και $y > 4$ να αποδείξετε ότι

α) $xy > 12$

β) $(x-1)(y+1) > 10$

γ) $(2x-1)(3y-7) > 25$

2.6.8. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x και y σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις :

α) Αν $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 0$

β) Αν $x^2 + y^2 + 2x + 4y + 5 = 0$

2.6.9. Να βρείτε τους αριθμούς x, y αν ισχύει

α) $x^2 + y^2 + 2x + 6y + 10 = 0$

β) $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 5 = 0$

γ) $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6y + 8z + 29 = 0$

δ) $4(x^2 + y^2 + 3) = 2 - 4(y - 3x)$

2.6.10. Να αποδείξετε ότι

α) $x^2 + y^2 \geq 2xy$

β) $(x+y)^2 \geq 4xy$

γ) $x(x+2) \geq 2(3x-2)$

δ) $(x+y)^2 + 4xy \geq -8y^2$

ε) $x^2 + 3xy \geq xy - y^2$

στ) $(x+3y)^2 \geq 12xy$

2.6.11. Αν $4,5 < x < 4,6$ και $5,3 < y < 5,4$ να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή καθεμιάς από τις παραστάσεις

α) $x + y$

β) $x - y$

γ) $\frac{x}{y}$

δ) $x^2 + y^2$

2.6.12. Αν $1 \leq x \leq 2$ και $3 \leq y \leq 4$ να δείξετε ότι

α) $4 \leq x + y \leq 6$

β) $1 \leq x - y \leq 3$

γ) $3 \leq xy \leq 8$

δ) $17 \leq 5x + 4y \leq 26$

ε) $-\frac{1}{2} \leq \frac{x}{2} - \frac{y}{4} \leq \frac{1}{4}$

2.6.13. Αν $-12 \leq x \leq -6$ και $2 \leq y \leq 3$ να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκονται οι παραστάσεις

α) $-x - 5y$

β) xy

γ) $\frac{x}{y}$

δ) $x - y^2$

2.6.14. Το πλάτος x και το μήκος y ενός ορθογωνίου ικανοποιούν τις ανισότητες $2 < x < 3$ και $3 < y < 5$. Αν αυξήσουμε το πλάτος κατά 0,2 και ελαττώσουμε το μήκος κατά 0,1, να βρείτε τις δυνατές τιμές :

α) της περιμέτρου

β) του εμβαδού του νέου ορθογωνίου

2.6.15. Αν $0 \leq \alpha < \beta$, να δείξετε ότι $\frac{\alpha}{1+\alpha} < \frac{\beta}{1+\beta}$

2.6.16. Αν $\alpha > 1 > \beta$, να αποδείξετε ότι $\alpha + \beta > 1 + \alpha\beta$.

2.6.17. Αν α, β θετικοί αριθμοί, να δείξετε ότι $(\alpha + \beta) \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \right) \geq 4$

2.6.18. Να δείξετε ότι $\alpha^2 + \gamma^2 \geq 2\beta(\alpha - \beta + \gamma)$

2.6.19. Αν α, β είναι ομόσημοι αριθμοί τότε να αποδείξετε ότι: $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} \geq 2$

2.6.20. Αν $\alpha + \beta = 1$ ναδειχθεί ότι $\alpha^2 + \beta^2 \geq \frac{1}{2}$

2.6.21. Να αποδείξετε ότι: $x^2 + y^2 + z^2 + 14 \geq 2x - 4y + 6z$

2.6.22. Αν $\alpha < \beta$ και $\gamma < \delta$, τότε να αποδείξετε ότι: $\alpha - \delta < \beta - \gamma$

2.6.23. Αν $0 < x < 1$ και $-2 < y < 2$ να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών περιέχονται

οι τιμές των παραστάσεων $x + y, -y, 2x + 3y, x - y, \frac{y}{x}$

2.6.24. Η τιμή ενός παντελονιού κυμαίνεται από 30 έως 35 ευρώ και μιας μπλούζας από 22 έως 25 ευρώ. Αν κάποιος θέλει να αγοράσει 2 παντελόνια και 3 μπλούζες τότε μεταξύ ποιών ποσών κυμαίνεται η τιμή που θα πληρώσει;

(Άσκηση 14 Σχ. Βιβλίου)

2.7 ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ 1^{ΟΥ} ΒΑΘΜΟΥ ΜΕ ΕΝΑΝ ΑΓΝΩΣΤΟ

✦ Για την 1^{ου} βαθμού ανίσωση $ax + \beta > 0$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

1. Αν $a > 0$, τότε : $ax + \beta > 0 \Leftrightarrow ax > -\beta \Leftrightarrow x > -\frac{\beta}{\alpha}$

2. Αν $a < 0$, τότε προσέχουμε, διότι όποτε πολλαπλασιάζουμε ή διαιρούμε με αρνητικό αριθμό, **αλλάζει η φορά** και έχουμε : $ax + \beta > 0 \Leftrightarrow ax > -\beta \Leftrightarrow x < -\frac{\beta}{\alpha}$

3. Αν $a = 0$ και $\beta > 0$, τότε : $ax + \beta > 0 \Leftrightarrow 0x > -\beta \Leftrightarrow 0 > -\beta$ και αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

4. Αν $a = 0$ και $\beta \leq 0$, τότε : $ax + \beta > 0 \Leftrightarrow 0x > -\beta \Leftrightarrow 0 > -\beta$ και είναι **αδύνατη**.

Ομοίως για τις ανισώσεις $ax + \beta < 0$, $ax + \beta \geq 0$, $ax + \beta \leq 0$.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

2.7.1 Να λυθούν οι ανισώσεις:

α) $5x - 15 < 0$

β) $-3x - 12 \leq 0$

Λύση:

α) Έχω $5x - 15 < 0 \Leftrightarrow 5x < 15 \Leftrightarrow x < 3$, δηλαδή $x \in (-\infty, 3)$

β) Έχω $-3x - 12 \leq 0 \Leftrightarrow -3x \leq 12 \Leftrightarrow x \geq -4$, δηλαδή $x \in [-4, +\infty)$.

2.7.2 Να λυθούν οι ανισώσεις:

α) $0x \leq 6$

β) $0x < -2$

γ) $0x < 0$

δ) $0x \geq 0$

Λύση:

α) Έχω $0x \leq 6 \Leftrightarrow 0 \leq 6$, άρα αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β) Έχω $0x < -2 \Leftrightarrow 0 < -2$, άρα είναι αδύνατη.

γ) Έχω $0x < 0 \Leftrightarrow 0 < 0$, άρα είναι αδύνατη.

δ) Έχω $0x \geq 0 \Leftrightarrow 0 \geq 0$, άρα αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

2.7.3 Να βρεθούν οι τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι ανισώσεις :

$$\frac{x+2}{4} - \frac{x}{3} \leq 1 \quad (1) \qquad \frac{x}{5} - \frac{x+1}{15} < 0 \quad (2)$$

Λύση:

ΜΕΘΟΔΟΣ

Όταν σε ασκήσεις μας ζητάνε που **συναληθεύουν δύο ή περισσότερες ανισώσεις ή να βρεθούν οι κοινές λύσεις τους** τότε:

1. Λύνουμε κάθε μια ανίσωση ξεχωριστά.
2. Στο τέλος μας διευκολύνει να τοποθετήσουμε τις λύσεις τους συγκεντρωτικά σε ένα κοινό άξονα.
3. Όταν το αποτέλεσμα είναι περισσότερα από ένα διαστήματα τότε χρησιμοποιούμε το «και» για κάθε περιοχή.

Για την (1) έχω: $\frac{x+2}{4} - \frac{x}{3} \leq 1$

$E.K.P.[3,4]=12$

$$\Leftrightarrow 12 \cdot \frac{x+2}{4} - 12 \cdot \frac{x}{3} \leq 12 \cdot 1 \Leftrightarrow 3 \cdot (x+2) - 4x \leq 12$$

$$\Leftrightarrow 3x + 6 - 4x \leq 12 \Leftrightarrow 3x - 4x \leq 12 - 6$$

$$\Leftrightarrow -x \leq 6 \Leftrightarrow x \geq -6$$

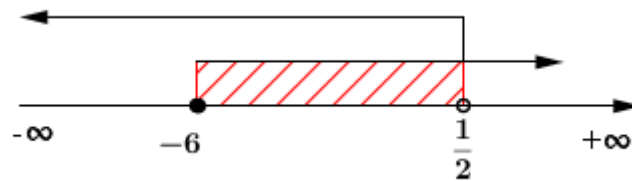
Για την (2) έχω: $\frac{x}{5} - \frac{x+1}{15} < 0$

$$E.K.\Pi.[5,15] = 15$$

$$\Leftrightarrow 15 \cdot \frac{x}{5} - 15 \cdot \frac{x+1}{15} < 15 \cdot 0 \Leftrightarrow 3x - (x+1) < 0$$

$$\Leftrightarrow 3x - x - 1 < 0 \Leftrightarrow 2x < 1 \Leftrightarrow x < \frac{1}{2}$$

Παριστάνουμε τις λύσεις πάνω στον άξονα για να βρούμε που συναληθεύουν οι ανισώσεις:



Άρα για να συναληθεύουν οι ανισώσεις πρέπει: $-6 \leq x < \frac{1}{2}$

2.7.4 Να επιλύσετε την ανίσωση: $\frac{33}{10} - \frac{3(x+1)}{5} < 4 + \frac{2(x-3)+1}{10}$

Λύση:

$$\frac{33}{10} - \frac{3(x+1)}{5} < 4 + \frac{2(x-3)+1}{10}$$

$$\frac{33}{10} - \frac{3x+3}{5} < 4 + \frac{2x-6+1}{10}$$

$$\frac{33}{10} - \frac{3x+3}{5} < 4 + \frac{2x-5}{10}$$

$$10 \cdot \frac{33}{10} - 10 \cdot \frac{3x+3}{5} < 10 \cdot 4 + 10 \cdot \frac{2x-5}{10}$$

$$33 - 2(3x+3) < 40 + (2x-5)$$

$$33 - 6x - 6 < 40 + 2x - 5$$

$$-6x - 2x < 40 - 5 - 33 + 6$$

$$-8x < -38 + 46$$

$$-8x < 8$$

$$\frac{-8x}{-8} > \frac{8}{-8}$$

$$x > -1$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ

2.7.1. Να επιλύσετε τις ανισώσεις και να παραστήσετε στην ευθεία τις λύσεις τους.

α) $7x + 3 \leq 15 + 4x$

β) $x + 5 > -3$

γ) $-(2 - x) > 3x - 2$

δ) $-(7 + x) < 4x - 1$

2.7.2. Να επιλύσετε τις ανισώσεις και να παραστήσετε στην ευθεία τις λύσεις τους.

α) $2(x - 1) + 5 < 9$

β) $8 - 3(2 - x) \leq 9 - 4(3 - x)$

γ) $3 - 2(x - 4) \leq 2 - 3(x - 3) + x$

δ) $1 - 5(2x - 3) \geq -3(x + 4) - (x - 2)$

ε) $3[x - 3(2x + 3)] < 2x - 13 - 2[3x - 2(3x + 8)]$

2.7.3. Να επιλύσετε τις ανισώσεις και να παραστήσετε στην ευθεία τις λύσεις τους.

α) $4(\omega - 2) > \omega - 2$

β) $3x + 3 - (x - 1) \geq 5 - x$

γ) $4y - 2 - (y + 3) < 3(y + 3) + 2$

δ) $5(2 - t) < t - 2$

2.7.4. Να επιλύσετε τις ανισώσεις και να παραστήσετε στην ευθεία τις λύσεις τους.

α) $\frac{2x - 3}{4} - \frac{3 - x}{5} > 2$

β) $3(1 - x) - \frac{2}{3}(x + 2) < \frac{x}{2}$

γ) $x + 5 + \frac{x - 3}{3} - \frac{x - 2}{2} > 0$

δ) $\frac{1}{3} \left(\frac{x - 1}{2} - \frac{x - 2}{3} \right) - \frac{x + 1}{6} > 3$

ε) $\omega - \frac{3 - \omega}{3} > \frac{\omega + 1}{2} - \frac{\omega - 2}{4}$

στ) $t + \frac{t + 1}{3} > \frac{2t - 1}{4} + \frac{11t}{12}$

ζ) $\frac{x + 4}{3} - \frac{3x + 1}{4} < -1$

η) $3x - \frac{2x + 1}{2} \leq 2(x + 2) - \frac{9}{2}$

$$\theta) \frac{2x+3}{10} - \frac{3x-2}{15} < 1$$

$$\iota) \frac{5x+1}{6} + \frac{3x-1}{5} > \frac{9x+1}{15} - \frac{1-x}{3} - \frac{8}{30}$$

$$\iota\alpha) \frac{3x-1}{4} - \frac{7(x-2)+3}{12} < \frac{3}{2} - \frac{1-2(3-x)}{3}$$

$$\iota\beta) \frac{x+4}{5} - (x-5) \leq \frac{4x-3(x-1)}{3} - \frac{x-2}{2}$$

2.7.5. Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων:

$$\alpha) x-3 < 2 \text{ και } 4-x < 3$$

$$\beta) 3(x-1) + x > 7 - x \text{ και}$$

$$6x-7 \leq 2(x+2) + 9$$

$$\gamma) 4x-1 < 3(1-x) + 10 \text{ και}$$

$$2(1-x) \leq 8$$

$$\delta) 2y-8 < \frac{3}{4}(y+1) \text{ και } \frac{3}{2}y + \frac{1}{12} > y-2$$

$$\epsilon) 4x-3 < 5 \text{ και } 2(x-3) > -4 \text{ και } 2x \geq 3(x-1)$$

$$\sigma\tau) \frac{2x+3}{2} > \frac{3x-1}{3} \text{ και } 3(2x-1) + x > -3(x+4) - 1 \text{ και } 4+x > 3(x-1)$$

2.7.6. Να επιλύσετε τις ανισώσεις και να παραστήσετε στην ευθεία τις λύσεις τους.

$$\alpha) x(x-2) - (x-1)^2 > 0$$

$$\beta) (x-1)(x+1) - (x-3)^2 < x$$

$$\gamma) (x-1)^3 - 5x + 2 < x^2(x-3)$$

$$\delta) (3x-1)^2 - (x-2)^2 < 8x^2 - 1$$

2.7.7. Να επιλύσετε και να παραστήσετε στην ευθεία των αριθμών τις λύσεις των ανισώσεων:

$$\alpha) -8 < 3x+1 \leq 22$$

$$\beta) -2 < 3-2x < 4$$

$$\gamma) 4 \leq 6x-2 \leq 16$$

2.7.8. Για ποιες τιμές του αριθμού α , η ανίσωση $3x-2\alpha-1 > \alpha(x+1)$ έχει λύση τον αριθμό $x=-1$.

2.7.9. Η Ευριδίκη είχε τετραπλάσια χρήματα από τη Βασιλική, αλλά δαπάνησε 15€ και τώρα έχει λιγότερα από τη Βασιλική. Να αποδείξετε ότι η Βασιλική έχει λιγότερα από 5€.

2.7.10. Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων:

$$\alpha) \begin{cases} 3x - 2 > 2x - 1 \\ 5x - 1 < 7x - 5 \end{cases}$$

$$\beta) \begin{cases} 3(x - 1) - x < -(2x - 1) \\ x - 2(x + 3) \leq -2 \end{cases}$$

$$\gamma) \begin{cases} 5x - 1 > 4x - 2 \\ 2x + 5 > 5x + 1 \end{cases}$$

$$\delta) \begin{cases} -4(x + 2) \geq 6 - 2(x - 3) \\ -3(x - 4) \geq 7 - 5(x + 1) \end{cases}$$

$$\epsilon) \begin{cases} 2 - \frac{1 - 3x}{2} \geq 0 \\ \frac{x + 2}{2} < \frac{3x + 4}{5} \end{cases}$$

$$\sigma\tau) \begin{cases} x - \frac{1}{2} < \frac{2x}{3} \\ \frac{1}{2}(x + 1) - 1 > \frac{x}{5} \end{cases}$$

2.7.11. Να βρείτε τις κοινές ακέραιες λύσεις των ανισώσεων

$$\begin{cases} \frac{x + 5}{4} - \frac{x - 3}{6} \geq \frac{x}{3} \\ -\frac{3x - 7}{12} - 2(x - 2) < -\frac{3}{4} - \frac{5(5 - 3x)}{6} \end{cases}$$

2.7.12. Να βρείτε τις κοινές ακέραιες λύσεις των ανισώσεων

$$\alpha) \begin{cases} 2x - 6 \geq 0 \\ 3x + 15 \leq 0 \\ 5x > 0 \end{cases}$$

$$\beta) \begin{cases} \frac{3x + 5}{2} > 4 \\ \frac{3 - 2x}{5} < 1 \\ 1 - \frac{6 - x}{2} < 0 \end{cases}$$

2.7.13. Να βρείτε τις κοινές ακέραιες λύσεις των ανισώσεων

$$\alpha) -8 \leq 12 - 4(x + 2) \leq 4$$

$$\beta) -4 \leq 2(x - 1) - 3(4 + x) < 11$$

2.7.14. Να προσδιορίσετε του ακέραιους που είναι λύσεις της εξίσωσης

$$x^2 - 5x = 14 \text{ και της ανίσωσης } \frac{x-1}{2} + \frac{x^2-1}{4} < \frac{x(x-1)}{4}$$

Διαγωνισμός Ε.Μ.Ε ‘Ο Θαλής’ 2010 – Α΄ Λυκείου

2.7.15. Να απλοποιήσετε τις παρακάτω κλασματικές παραστάσεις

$$A = \frac{(x^2 + y^2)(x^3 - y^3)(x^3 + y^3)}{(x^2 - y^2)(x^4 + y^4 + x^2 y^2)}$$

$$B = \frac{4x^2 + 16y^2 + 16xy - 25}{2x + 4y + 5}$$

Αν $y \neq x$ και $2x + 4y + 5 \neq 0$

Στη συνέχεια να λύσετε την εξίσωση $A=B$.

Διαγωνισμός Ε.Μ.Ε ‘Ο Ευκλείδης’ 2013 – Α΄ Λυκείου

2.7.16. Να λύσετε την ανίσωση $2x + (x+1)(x-1) < x^2 + x - 2 + \lambda$. Στη συνέχεια να

λύσετε την ανίσωση $\frac{2x-1}{4} - \frac{3}{8} > \frac{x-1}{4}$ και να προσδιορίσετε της τιμές της παραμέ-

τρου λ για τις οποίες υπάρχουν τιμές του x για τις οποίες οι δύο παραπάνω ανισώσεις συναληθεύουν.

Διαγωνισμός Ε.Μ.Ε ‘Ο Θαλής’ 2015 – Α΄ Λυκείου